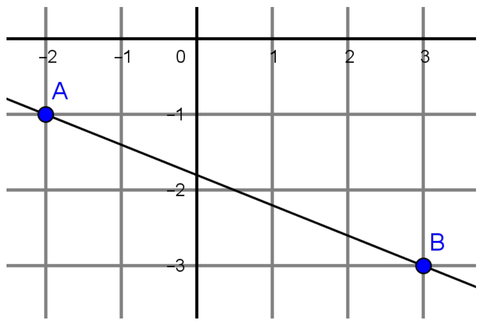
1) $e^{-3\ln 2} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ (C 057b)

2) $\left| \dfrac{1+3\mathbf{i}}{(-1+\mathbf{i})^3} \right| = \dfrac{|1+3\mathbf{i}|}{|-1+\mathbf{i}|^3} = \dfrac{\sqrt{10}}{(\sqrt{2})^3} = \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C 221c)

3) Dans $\mathbb{C}$, les racines 4ème de l'unité sont $1, \ -1, \ \mathbf{i}, \ -\mathbf{i}$ (C 324)

4) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) (C 461a)



$y = ax + b$ coefficient directeur $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{5}$

$b = y_A - a.x_A = -1 + \frac{2}{5}(-2) = \frac{-9}{5}$ $\boxed{y = \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{-9}{5}}$

5) Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 5$ (C 549b)
Exprimer u_n en fonction de n et $u_0 = 2$

Point fixe ℓ : $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + 5 \iff \dfrac{2}{3}\ell = 5 \iff \ell = \dfrac{15}{2}$

Par soustraction : $u_{n+1} - \ell = \dfrac{1}{3}(u_n - \ell)$ (suite géométrique)

$\Rightarrow \quad u_n - \ell = (1/3)^n(u_0 - \ell) = (2/3)^n(2 - \frac{15}{2}) = \frac{-11}{2}(1/3)^n$

$\Rightarrow \quad u_n = \dfrac{15}{2} + \dfrac{-11}{2}(1/3)^n$

6) **Formule de Pascal** : (C 631c)

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1 \text{ entiers}$$

7) $f : E \to F$ est surjective $\iff$ (C 754b)
pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$
admet au moins une solution x dans E

8) Équivalent en 0 avec $\sqrt{\ }$: $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$ (C 805b)

9) La propriété suivante est **FAUSSE** : (C 838b)

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $e^f \underset{a}{\sim} e^g$

Contre exemple : $f(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = x^2$

Mais $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \to +\infty$ donc $e^f \underset{+\infty}{\not\sim} e^g$

10) $\arctan x < \pi/6 \iff x < \tan \pi/6 \iff x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (C 925a)
(avec *arctan* définie sur $\mathbb{R}$)

11) $\displaystyle\int u' u^\alpha = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln |u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$ (C 1051b)

12) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et paire et $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt$ (C 1117a)
g est-elle paire ? impaire ? Démontrez–le

Posons $u = -t \Rightarrow \ dt = \ du$

$g(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} f(t) \, dt = \int_x^{2x} f(-u)(- \, du)$ avec f paire

$\Rightarrow \quad g(-x) = -\displaystyle\int_x^{2x} f(u) \, du = -g(x)$ Donc g est impaire

13) Soit l'équation $ay''+by'+c.y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $a\neq 0$ et $\lambda\in\mathbb{C}$

Si λ n'est pas racine de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (C 1156b)

alors on cherche une solution particulières de la forme $y_1(x)=K\mathrm{e}^{\lambda x}$

14) **Théorème de convergence :** Soit u une suite croissante (C 1231a)

Si la suite u est majorée
Alors la suite u converge
sinon la suite u tend vers $+\infty$

15) Formule de Taylor-Young en $a\in I$ à l'ordre n : (C 1297b)
Soit f une fonction de classe C^n sur I

Alors $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o\big((x-a)^n\big)$$

16) Soit f croissante sur $]a,\ b[$ avec $a<b$, $(a,\ b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1416c)

Si f n'est pas minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to a}f=-\infty$

17) Quelle propriété particulière vérifie la fonction (C 1480b)

$$1_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$

18) Soit $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$ (C 1617c)

f est-elle dérivable en 0 ? **Démontrer-le**

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}=\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1/y}=y\mathrm{e}^{-y}$$

avec $y=1/x\to+\infty$ quand $x\to 0^+$

Donc $y\mathrm{e}^{-y}\to 0$ (croissance comparée)

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

donc f est dérivable en 0 (à droite) et $f'(0)=0$

19) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (C 1810a)

$\Longleftrightarrow$ la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

20) $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'e.v. des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (C 2700d)

Montrer que $F=\{f\in E,\ f(1)=2f(3)\}$ est un sev de E

- $F\subset E$
- l'application nulle $\overline{0}\in F$: $\overline{0}(1)=0=2\overline{0}(3)$
- Soient $(f,g)\in F^2,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$,
  $(a.f+b.g)(1)=a.f(1)+b.g(1)=a.2f(3)+b.2g(3)$ car $f,g\in F$
  $=2(af+bg)(3)$ $\Rightarrow$ $af+bg\in F$ (stabilité par CL)
- Donc F est un sev de E

21) Soient $F,\ G,\ H$ trois sev de E (C 2751c)

$F+G\subset H \iff (F\subset H \text{ et } G\subset H)$

22) Donner (de façon résumée) les 3 formules à connaître sur les matrices de passage de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ (C 2774)

$$X_{\mathcal{B}}^{\vec{u}}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}^{\vec{u}} \qquad P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}})^{-1} \qquad P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\begin{array}{c}\mathcal{C}\\ \left(\quad ,\quad\right)\end{array}_{\mathcal{B}}$$

23) Soient $\mathcal{B}=(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$, $\mathcal{U}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ (C 2903a)
des bases respectives de E et F.

Soit $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\,\mathcal{U}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&3&0&0\end{pmatrix}$

Base de Imf : (u_2,u_3) Base de Ker$f$: (e_3,e_4)

24) Soit $f:E\to F$ une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base de E (C 2920e)

f bijective $\iff$ $f(\mathcal{B})$ est une base de F

25) Soit $E = F \oplus G$ et p la projection sur F parallèlement à G. (C 2951)

$$p(u) = v \iff \underline{v \in F \quad \text{et} \quad v - u \in G}$$

26) Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (C 2965a)
de p la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(e_2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car si $u \in F,\ p(u) = u \quad \Rightarrow \quad p(e_1) = e_1,\ p(e_3) = e_3$, et si $u \in G,\ p(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(e_2) = 0$

27) Propriété : Soit $f : F \to G$ une application linéaire (C 3024a)
et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ \varphi)$

28) Caractérisation par les dérivées successives (C 3121c)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\deg P = k \iff \left(P^{(k)} \neq 0 \quad \text{et} \quad P^{(k+1)} = 0 \right)$$

29)

Déterminer le reste de la division euclidienne de : (E 3151d) de $A = X^n - X - 1$ par $B = (X-1)(X+2)$

$A = BQ + R$ avec $\text{d}^\circ R < \text{d}^\circ B \Rightarrow \text{d}^\circ R \leq 1 \Rightarrow R = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} A(1) = B(1)Q(1) + R(1) \\ A(-2) = B(-2)Q(-2) + R(-2) \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = (-2)^n + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \begin{cases} a + b = -1 \\ -3a = 2 + (-2)^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{r} 3L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 3b = -1 + (-2)^n \\ -3a = 2 + (-2)^n \end{cases}$$

$$\iff R = \frac{-2 - (-2)^n}{3} X + \frac{-1 + (-2)^n}{3}$$

30) Polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ (C 3170a)

- $X + a$
- $X^2 + bX + c$ avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$