

1) Pour $x > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x^{b \times c} = (x^b)^c = (x^c)^b$ (C 015c)

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z) + \arg(z') = \arg(z.z')$ $[2\pi]$ (C 231b)

3) 3 points distincts A, B, C d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$ (C 351d)

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \right) = \arg \left(\frac{z(\overrightarrow{BA})}{z(\overrightarrow{BC})} \right) = \arg \left(\frac{a-b}{c-b} \right) \quad [2\pi]$$

4) Pour $x^2 \neq 1$ et $n \geq 5$ (C 517b)

$$\sum_{k=5}^n x^{2k} = \sum_{k=5}^n (x^2)^k = \frac{(x^2)^5 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{x^{10} - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

5) Donner un encadrement décimal de $x \in \mathbb{R}$ à 10^{-n} près : (C 605b)

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Par exemple pour $x = \pi$ et $n = 2$ $10^2 \pi = 314,15\dots$
 $\Rightarrow \lfloor 10^n x \rfloor = 314 \Rightarrow \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = 3,14 \Rightarrow 3,14 \leq \pi < 3,15$

6) Définition $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective (C 752d)

$$\iff \exists (a, b) \in E^2, f(a) = f(b) \text{ ET } a \neq b$$

7) Équivalent en 0 avec $\cos x$: $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ (C 807b)

8) $f \underset{0}{\sim} h$ et $g \underset{0}{\sim} h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f - g) = 0$ est Faux (C 825d)

Contre-exemple : $h(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

$g(x) = -1 + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ mais $f(x) - g(x) = 2 \not\rightarrow 0$

9) Tableau de variations complet de \arcsin (C 907a)

x	-1	0	+1
$\arcsin x$		0	$+\pi/2$

\nearrow (entre 0 et $+\pi/2$)
 \nearrow (entre -1 et 0)
 $-\pi/2$ (sous -1)

10) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$ (C 1014b)

\iff La courbe C_f admet une tangente verticale en $(a, f(a))$

11) **Primitive** : Soit f une fonction continue un intervalle I (C 1100a)

La primitive de f qui s'annule en a est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

12) Soit l'équation $y'' + 6y' + 13y = 0$ (C 1155f)

dont l'équation caractéristique : $r^2 + 6r + 13 = 0$

a pour racines $r_1 = -3 + 2i$, $r_2 = -3 - 2i$

Solutions **réelles** : $y(t) = e^{-3t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, $A, B \in \mathbb{R}$

13) Si une suite réelle u converge vers $\ell > 0$ (C 1229c)

Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$

Démonstration : Posons $\varepsilon = \ell/2 > 0$ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Donc il existe $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

Avec $\ell - \varepsilon = \ell/2 \Rightarrow u_n \geq \ell/2 > 0$ pour $n \geq p$ CQFD

14) Théorème des suites adjacentes (C 1234b)

Si u et v sont adjacentes (avec u croissante)

Alors u et v convergent vers une même limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$

On demande bien le théorème et pas la définition des suites adjacentes.

15) Définition : f est positive au voisinage de a (C 1400b)
 $\iff \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \in]-\infty, A] \Rightarrow f(x) \geq 0$

16) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. (C 1422c)
 Montrer que f admet un point fixe.

Posons $g(t) = f(t) - t. \quad \forall t \in [0, 1], 0 \leq f(t) \leq 1$

$\Rightarrow g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$ Or g est continue sur $[0, 1]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = x_0$

17) Vrai ou Faux? **Faux** (C 1606d)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $x_0 \in I$

Si f est continue et dérivable sur I et $f'(x_0) = \ell$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$

En effet, rien ne justifie que f' soit continue en x_0

18) Définition : La série $\sum u_n$ diverge grossièrement (C 1804e)
 Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0

19) ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$ (C 2621)

20) Soit A une matrice telle que $A^3 = 0$ (C 2630c)

$$(3A + 2I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3A)^k (2I)^{n-k}$$

Binôme de Newton car $3A$ et $2I$ commutent

$$= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} 3^k A^k 2^{n-k} \quad \text{car } A^k = 0 \text{ pour } k \geq 3$$

$$= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 3 \cdot 2^{n-1} A + \binom{n}{2} 3^2 \cdot 2^{n-2} A^2$$

$$= 2^n I + n \cdot 3 \cdot 2^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^{n-2} A^2$$

$$= 2^n \left(I + \frac{3}{2} n \cdot A + \frac{9}{8} n(n-1) \cdot A^2 \right)$$

21) Propriété caractéristique Soient F et G deux sev de E (C 589b)
 $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$

22) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ (C 2850c)
 et $M = \text{Mat}_{(\mathcal{B})}(f)$. Traduire par des relations vectorielles

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} f(e_1) = \vec{0} \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = 2e_3 \end{cases}$$

23) (Propriété) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire (C 2912b)
 et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E

Alors $\text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \text{Im}f$

24) $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (u_1, u_2, u_3) une base de E (C 2944b)
 Démontrer que $\text{Vect}(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) \subset \text{Im}f$

Soit $v \in \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), f(u_3))$

Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$v = a \cdot f(u_1) + b \cdot f(u_2) + c \cdot f(u_3)$$

$$= f(a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3) \quad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

$$\Rightarrow v = f(u) \quad \text{avec } u = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 \in E$$

$$\Rightarrow v \in \text{Im}f. \quad \text{Donc } \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) \subset \text{Im}f$$

25) $E = F \oplus G$ et p est la projection sur F parallèlement à G (C 2960d)

Alors $\forall u \in E, p(u) = 0 \iff u \in G$

26) Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ (C 3011)

$$\mathcal{U} \text{ libre} \iff \text{rg}(\mathcal{U}) = \underline{\text{Card } \mathcal{U}} = p$$

27) $P \in \mathbb{K}_n[X]$ \iff P est un polynôme tel que $d^\circ P \leq n$ (C 3102a)

$$\iff P \text{ peut s'écrire sous la forme } \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

28) Propriété (Caractérisation par les racines) : (E 3136a)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $dP \leq n$

Alors $P = 0 \iff P$ possède au moins $n + 1$ racines

29) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (C 3152b)

tel que $P = (X - 1)(X + 1)$ divise $Q = X^8 + 2X^7 + aX^5 + b$

$$P = (X - 1)(X + 1) \text{ divise } Q \iff Q(1) = Q(-1) = 0$$

$$\iff P(1) = 3 + a + b = 0 \text{ et } P(-1) = -1 - a + b = 0$$

$$\iff \begin{cases} a + b = -3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2b = -2 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2b = -2 \\ -2a = 4 \end{cases} \iff (a, b) = (-2, -1)$$

30) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ $\overline{P(z)} = \overline{P(\overline{z})}$ (C 3168a)