1) $e^{2\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$ (C 057a)

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*,\ \arg(z) - \arg(z') = \quad \arg(z/z') \quad [2\pi]$ (C 232b)

3) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 356b)

$$\arg\left(\frac{z_w}{z_u}\right) = 0 \quad [\pi] \qquad \iff \qquad (u, v) \text{ sont colinéaires de même sens}$$

En effet $\quad \arg\left(\dfrac{z_w}{z_u}\right) = \arg(z_w) - \arg(z_u)$

Et u, v colinéaires de même sens $\quad \iff \quad \arg(z_w) - \arg(z_u) = 0 \quad [2\pi]$

Et u, v colinéaires $\quad \iff \quad \arg(z_w) - \arg(z_u) = 0 \quad [\pi]$

Dans ce dernier cas, vous pouvez avoir $\quad \arg(z_w) - \arg(z_u) = \pi \quad [2\pi]$
et alors u, v sont colinéaires de sens opposé

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pour} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{pour} \quad q = 1 \end{cases}$ (C 516a)

5) **Vrai ou Faux ?** .... (C 584d)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x < 2$

Car $\quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2} > 0 \quad$ donc tout est positif
attention : la réciproque est fausse

6) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 724a)

$$(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$$

7) Soient $\quad f : E \to F,\ g : F \to G$ deux applications (C 786a)
Montrer que $\quad g \circ f$ injective $\quad \Rightarrow \quad f$ injective

Supposons $\quad g \circ f$ injective

Il faut montrer que $\quad \forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y)$

$\Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad \Rightarrow \quad x = y \quad$ car $g \circ f$ est injective

Donc f est injective.

8) Si $\quad \ell$ est un réel non nul $\quad (\ell \in \mathbb{R}^*)$ (C 833a)

Alors $\quad \displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \iff \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell$

9) Pour $a \in [-1,\ +1],\ \arccos a = \frac{\pi}{5} \quad \iff \quad a = \cos \frac{\pi}{5}$ (C 920d)

10) Soit f une bijection de I sur J (C 1036b)
Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$

Si $\boxed{f \text{ est dérivable en } \quad x = f^{-1}(y) \quad \text{et} \quad f'(x) \neq 0}$

Alors $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable en } y} \quad$ et $\quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Bien donner le lien entre x et y.
Sinon écrire $\quad f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad$ n'a aucun sens

11) $J = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 - x^2}\ dx$ (C 1107b)

Bornes : $\begin{cases} x = 1 = \sin(\pi/2) & t = \pi/2 \\ x = 0 = \sin 0 & t = 0 \end{cases} \qquad x = \sin t \Rightarrow\ dx = \cos t\ dt$

$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = |\cos t| = \cos t \quad$ car $t \in [0; \pi/2]$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^2\ dt$

12) Soit l'équation $\quad 4y'' + 4y' + y = 0 \quad$ (E) (C 1140)
Déterminer les solutions **RÉELLES** de cette équation

Équation caractéristique : $\quad r^2 + 4r + 4 = 0 = (r + 2)^2 \quad \Delta = 0$

$r_0 = -2 \quad$ racine double

Solutions réelles : $\quad y(t) = e^{-2t}(A + B.t)$

13) Théorème de convergence des suites monotones (C 11232b)

Cas croissant :

Si la suite u est croissante et majorée par un réel M

Alors la suite u converge vers une limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq M$

14) Vrai ou Faux ? **Faux** (C 1299c)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$

Alors f admet un DL à l'odre 2 en a

$\Longleftrightarrow$ f est admet une dérivée seconde en a

15) Si f est une fonction réelle continue sur un intervalle I (C 1420d)

Alors pour tout $(a, b) \in I$

et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel x_0 compris entre a et b tel que $y_0 = f(x_0)$

(C'est le théorème des valeurs intermédiaires)

- On ne peut pas écrire dans les prémisses : « f continue sur $[a, b]$ » car dans la conclusion, on a pour tout (a, b)
  Donc la la prémisse ne peut pas dépendre de (a, b)
- Pour que le TVI, il faut impérativement être sur un **intervalle**.

  Contre-exemple : $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
  et 0 compris entre $f(-1)$ et $f(1)$.
  Mais 0 n'admet aucun antécédent par f.
  Cela ne marche pas parce que $\mathbb{R}^*$ **n'est pas un intervalle**

16) En utilisant la convexité de la fonction $f : t \mapsto e^t$, (E 1497)

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1 + t$

$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est convexe sur $\mathbb{R}$

Donc C_f est au dessus de ses tangentes. En particulier pour la tangente en 0 d'équation $y = x + 1$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1 + t$

17) Définition : Soit la série de terme général $(u_k)_{k \geq 0}$ (C 1802b)

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé la somme partielle de la série

18) Vrai ou faux ? **Faux** (C 1820b)

Les séries $(\sum u_k)_{k \geq 0}$ et $(\sum u_k)_{k \geq p}$

sont de meme nature et ont la même somme.

Elles sont de même nature mais **elles n'ont pas la même somme**

19) Critères de convergence des séries à termes positifs (E 1836a)

Pour les différents critères , dire si

$\sum u_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum v_k$ converge

est **Vrai ou Faux**

- Comparaison $(u_n \leq v_n)$ **Faux**
- domination $(u_n = O(v_n))$ **Faux**
- Négligeabilité $(u_n = o(v_n))$ **Faux**
- Équivalence $u_n \sim v_n$ **Vrai**

20) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (C 1870

et calculer sa somme

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(1+k) - k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Donc la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

21) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 1881b)

$u_n = o(v_n)) \quad \Rightarrow \quad u_n = O(v_n)$

22) <u>Vocabulaire</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Qu'est-ce que $GL_n(\mathbb{K})$? (C 2608)

$GL_n(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$

23) Donner une famille génératrice de F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - 2z = 0$ (C 2717a)

Soit $k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad k \in F \iff x = -y + 2z$

$\iff k = (-y + 2z,\ y,\ z) = y\underbrace{(-1, 1, 0)}_{=u} + z\underbrace{(2, 0, 1)}_{=v} = y.u + z.v$

$\Rightarrow \quad k \in \mathrm{Vect}(u, v)$ D'où $F \subset \mathrm{Vect}(u, v)$

D'autre part u, v vérifient l'équation de F

$\Rightarrow \quad u, v \in F \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vect}(u, v) \subset F$

Donc $F = \mathrm{Vect}(u, v) \quad \Rightarrow \quad (u, v)$ famille génératrice de F

24) Vrai ou Faux ? ... **Faux** (C 2772c)

Soient $\mathcal{B} = (b_1,\ b_2),\ \mathcal{V} = (v_1,\ v_2)$ deux bases d'un ev E

et $v_1 = b_1 - 2b_2 \quad v_2 = 4b_1 + 2b_2$

Alors $P_{\mathcal{V}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

25) (Propriété) Soit $f : E \to F$ est une application <u>linéaire</u> (C 2911a)

f surjective $\iff \mathrm{Im} f = F$

26) Soient $f : E \to F$ une application linéaire (C 2946a)
Démontrer que f est injective $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

Supposons f injective.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 = f(0_E)$

$\Rightarrow x = 0_E$ (car f injective) D'où $\mathrm{Ker} f \subset \{0\}$

De plus $f(0_E) = 0_F$ car f est linéaire

$\Rightarrow \quad 0_E \in \mathrm{Ker} f$ D'où $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

27) Dans $\mathbb{R}^3$ de base canonique (e_1, e_2, e_3) (C 2966a)
$p = p_F^G$ avec $F = \mathrm{Vect}(e_2) \quad G = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$
Calculer $p\big((x, y, z)\big)$

$u = (x, y, z) = (0, y, 0) + (x, 0, z) = v + w$

avec $v = y.e_2 \in F$ et $w = x.e_1 + z.e_3 \in G$

Donc $p\big((x, y, z)\big) = (0,\ y,\ z)$

28) Soit M une matrice carrée d'ordre n (C 3035b)

$\mathrm{rg}(M) = n \iff M$ est inversible

29) **Condition suffisante sur les racines** : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ (C 3136b)

Si <u>P admet une infinité de racines dans $\mathbb{K}$</u> alors $P = 0$

30) Vrai ou Faux ...**Vrai** (C 3169b)

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ alors $\overline{P(z)} = P(\ \overline{z}\ )$

$$P \in \mathbb{R}[X] \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad \text{avec} \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{a_k} = a_k$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k}\ \left(\overline{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\ \left(\overline{z}\right)^k = P(\ \overline{z}\ )$$