

Intro

On veut donner sens à des choses du genre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \simeq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2$$

Plus précisément :

- La SUITE $((1/2)^n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 (suite géométrique de raison $q = 1/2$ avec $|q| < 1$)

- La SERIE de terme général $((1/2)^k)_{k \geq 1}$ est notée $(\sum (1/2)^n)_{n \geq 1}$ ou $\sum_{n \geq 1} (1/2)^n$ ou $\sum_{k \geq 1} (1/2)^k$

- Cette série est la suite $(S_n) = (\sum_{k=1}^n (1/2)^k)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (1/2)^k \text{ est appelée la somme partielle de la série}$$

- $S_n = \frac{(1/2) - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{2 - 1} = 1 - (1/2)^{n+1}$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $S_n \rightarrow 1$ On va dire que la STG $(1/2^n)_{n \geq 1}$ **converge**

$$\text{et on notera } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ est appelée la **somme de la série**

C'est la limite de la suite des sommes partielles (quand elle converge)

1 Généralités

Définition 1 : Série

La **série de terme général** $(u_n)_{n \geq 0}$ est la **suite** $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

S_n est appelée la **somme partielle** de la série

La série est alors notée $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ ou encore $\sum_{n \geq 0} u_n$

Définition 2 : Série réelles ou complexes

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$, on parle d'une série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ réelle

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$, on parle d'une série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ complexe

Remarque 1 : on définit de même, par exemple, la série $(\sum u_n)_{n \geq 2}$: c'est la

$$\text{suite } (S_n)_{n \geq 2} \text{ avec } S_n = \sum_{k=2}^n u_k$$

Remarque 2 : une série est en fait une suite écrite sous une forme particulière

Remarque 3 : dans la suite, il faudra être attentif à ne pas confondre les propriétés du **terme général** et les propriétés de la **série**

Définition 3 : Série convergente

La série $(\sum u_n)$ est dite convergente si et seulement si la suite (S_n) converge (sinon, elle est divergente).

$$\text{On note alors : } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ est alors appelée la } \mathbf{somme} \text{ de la série.}$$

Déterminer la **nature** d'une série consiste à savoir si elle est convergente ou divergente.

Exemples

a) $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{pour } q \neq 1$$

Si $|q| < 1$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty \Rightarrow q^{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$$

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge et $\frac{1}{1-q}$ est la somme de cette série

$$\text{et on a } \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

$$\text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge}$$

Attention : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)}$ est une HORREUR (à cause des indices)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(1+k) - k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Donc la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

$$\text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} : \text{ La série harmonique diverge.}$$

Montrez-le en prouvant $S_{2n} - S_n \geq 1/2$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$\text{Pour } k \in [[n+1, 2n]], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$

Par l'absurde : Si la série converge

$$\lim S_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow S_{2n} \rightarrow \ell \Rightarrow S_{2n} - S_n \rightarrow 0$$

Impossible car $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

Conclusion : la série $\sum 1/k$ diverge

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en déduire?

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 - \frac{1}{2} \quad S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Mq (S_{2n}) croissante (S_{2n+1}) décroissante et $S_{2n+1} - S_{2n} \rightarrow 0$

• S_{2n} croissante

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

La suite (S_{2n}) est croissante

• $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} < 0$ (S_{2n+1}) est décroissante

• $|S_{2n+1} - S_{2n}| = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$

Donc les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes

Donc d'après le théorème, elles tendent vers une même limite ℓ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} \leq \ell \leq S_{2n+1}$$

Et donc $\ell = \lim S_n \Rightarrow$ la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge

Remarque : on montre par ailleurs que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$

Propriété 1 : Propriété utile (et importante)

Soit la série de terme général (u_n) de somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$

Si la série converge vers ℓ alors $S_n \rightarrow \ell$ et $S_{n-1} \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow 0$
 Par conséquent, on a :

Propriété 2 : condition nécessaire de convergence

- Si la série $(\sum u_n)$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Par contraposée :

- Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série associée diverge
- On dit alors que la série **diverge grossièrement**

Attention : la réciproque est fautive (cf exemple c)

Exemple 1 : $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1}$

$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ donc la série associée diverge grossièrement

Exemple 2 : Série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

La série harmonique diverge. Et pourtant son terme général $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

Propriété 3 : Somme de série tronquée

Soient les séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq p} u_k$

Alors, pour tout $n \geq p$, $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=p}^n u_k + \sum_{k=0}^{p-1} u_k$

Propriété 4 : Série tronquée

Soient les séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq p} u_k$

Ces deux séries sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge)

Si elles convergent alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$$

ou encore : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{p-1} u_k$

Définition 4 : Reste de la série

Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge

Alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé le reste de la série

On a alors $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Exemple

Pour $|q| < 1$ $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Pour $p \geq 0$ étudions la série tronquée : $\sum_{k \geq p+1} q^k$

Convergence ? Somme de la série ? Limite du reste de la série $\sum_{k \geq p+1} q^k$?

Comme la série $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge, la série tronquée $\sum_{k \geq p+1} q^k$ converge également

On a donc $\sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^N q^k = \frac{q^{p+1} - q^{N+1}}{1-q} = \frac{q^{p+1}}{1-q}$

car $|q| < 1 \Rightarrow q^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Formule à retenir : $\sum_{k=p}^{+\infty} q^k = \frac{q^p}{1-q}$ pour $|q| < 1$

D'après la formule des séries tronquées, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^p q^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = S_p + \sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k$$

On appelle $\sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = R_p$ le reste de la série

On remarque ici que $\sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{p+1}}{1-q} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$

Ce résultat est en fait général :

Propriété 5 : Reste

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors :
 La somme $R_n = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ existe
 et on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = 0$

Démonstration

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe avec $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p u_n$

Or on sait que par troncature, la série $\sum_{n \geq p+1}^{+\infty} u_n$ converge également et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^p u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$$

Donc $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^p u_n$

Or $S_p = \sum_{n=0}^p u_n \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ quand $p \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow R_p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = 0$

Remarquons que R_n est déjà elle-même la limite d'une somme. On prend donc la limite d'une limite...

En effet $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=p+1}^N u_n$

Et donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=p+1}^N u_n \right) = 0$

fin demo

Propriété 6 : Linéarité

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
 Si les séries $(\sum u_k)$ et $(\sum v_k)$ convergent
 Alors la série $(\sum (a.u_k + b.v_k))$ converge également et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a.u_k + b.v_k) = a. \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + b. \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Découle de

$$\sum_{k=0}^n (a.u_k + b.v_k) = a. \sum_{k=0}^n u_k + b. \sum_{k=0}^n v_k \rightarrow a. \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + b. \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Propriété 7 : Suite et série

Une suite (u_n) converge
 \iff la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

car $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \dots$

2 Séries de référence

Propriété 8 : Séries géométriques

La série $(\sum q^n)$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
 On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ et $\sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$

Propriété 9 : Séries de Riemann

Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$

Voir la démonstration au paragraphe « comparaison séries intégrales »

3 Séries à termes positifs**Définition 5 : Série à termes positifs**

La série réelle $\sum u_n$ est à terme positif ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

Propriété 10 : Série à termes positifs

Si une série $(\sum u_n)$ est à termes positifs
alors la suite (S_n) des sommes partielles est croissante

Car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$

Critères de convergence (séries à termes positifs)**Propriété 11 (Critère 1) : majoration globale**

Une série $(\sum u_n)$ à termes positifs est convergente si et seulement si elle est majorée (par une **constante**).

C'est-à-dire qu'il existe un réel M (indépendant de n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$$

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq M$

Si la série n'est pas majorée, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$

Démonstration

La série $\sum u_n$ converge ssi la suite (S_n) converge
Or la suite S_n croissante donc converge ssi majorée

fin demo

Propriété 12 (Critère 2) : comparaison

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs telles que

$$u_n \leq v_n \quad (\text{à partir d'un certain rang } p)$$

• Si la série $(\sum v_n)$ converge, alors $(\sum u_n)$ converge

$$\text{Et dans ce cas : } \sum_{k=p}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$$

• Si $(\sum u_n)$ diverge, alors $(\sum v_n)$ diverge.

Démonstration : découle de $u_n \leq v_n \Rightarrow u_n = O(v_n)$

$$\text{Pour } k \geq p, u_k \leq v_k \Rightarrow \sum_{k=p}^n u_k \leq \sum_{k=p}^n v_k$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^n u_k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^n v_k \quad \text{ce qui donne la formule} \quad \textit{fin demo}$$

Propriété 13 (Critère 3) : négligeabilité

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes **positifs** telles que

$$u_n = o(v_n)$$

• Si la série $(\sum v_n)$ converge, alors $(\sum u_n)$ converge

• Si $(\sum u_n)$ diverge, alors $(\sum v_n)$ diverge.

Démonstration : $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$ *fin demo*

Propriété 14 (Critère 4) : équivalence

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes **positifs** telles que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

C'est-à-dire :

la série $(\sum u_n)$ converge si et seulement si la série $(\sum v_n)$ converge

Démonstration

Provient de $u_n \sim v_n \Rightarrow [u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(u_n)]$

fin demo

Attention : Bien distinguer dans ces 4 critères des séries à termes positifs, les critères pour lesquels il y a équivalence, et ceux pour lesquels il y a implication

simple.

Exemples

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 3) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ 4) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

5) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$ 6) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 - 2}$ 7) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n^2 + 3} + 5}{n^2 - 2n + 3}$

8) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$ 9) $\sum_{n \geq 0} \frac{e^n}{n^2 + 1}$ 10) $\sum_{k \geq 0} \frac{\sin n}{n\sqrt{n} - 2}$

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ série de Riemann avec $\alpha = 1$ (série harmonique) : diverge

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Riemann avec $\alpha = 1/2 \Rightarrow$ diverge

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ Riemann avec $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ converge

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1 \Rightarrow$ converge

5) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$ $\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) et séries à termes positifs $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$ converge

6) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 - 2}$ $\frac{1}{n^2 - 2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) et séries à termes positifs (à partir du rang 2) $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 - 2}$ converge

7) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n^2 + 3} + 5}{n^2 - 2n + 3} = \sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge
Les séries sont à termes positifs donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

8) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$ $u_n = e^{-n^2}$ Mq $u_n = o(1/n^2)$

$\frac{u_n}{1/n^2} = n^2 u_n = n^2 e^{-n^2} = X e^{-X}$ avec $X = n^2 \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow X e^{-X} \rightarrow 0 \Rightarrow u_n = o(1/n^2)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) et les

séries sont à termes positifs

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$ converge

9) $\sum_{n \geq 0} \frac{e^n}{n^2 + 1}$ $u_n = \frac{e^n}{n^2 + 1} \sim \frac{e^n}{n^2} \rightarrow +\infty$

on n'a pas $u_n \rightarrow 0$ Donc la série diverge grossièrement

10) $\sum_{k \geq 0} \frac{\sin n}{n\sqrt{n} - 2}$

4 Domination

Définition 6 : Domination

Soient (u_n) et (w_n) deux suites **complexes**
On dit que la suite complexe (u_n) est *dominée* par une suite (w_n) ssi la suite $\left(\left| \frac{u_n}{w_n} \right| \right)$ existe (à partir d'un certain rang) et est majorée (par une constante).

Ou encore :

il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C.w_n$

On note alors $u_n = O(w_n)$ qui se lit : u_n est un grand-O de w_n

• Exemple 1 : $u_n = n \cdot \sin n = O(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$

• Exemple 2 : $v_n = (5n^2 - 17n) \cos(3n + 7n^2 + 2)$
 $v_n = o(n^3)$ car $|v_n| \leq |5n^2 - 17n| = o(n^3)$

$v_n \sim 5n^2$ Marche pas

car $\frac{v_n}{5n^2} = (1 - \frac{17}{5n}) \cos(3n + 7n^2 + 2)$ ne tend pas vers 1

Par contre

$|\cos(3n + 7n^2 + 2)| \leq 1$
 $\Rightarrow |v_n/n^2| \leq |5 - 17/n| \leq 5 \Rightarrow v_n = O(n^2)$

Ou encore

$$\text{et } |\cos(3n + 7n^2 + 2)| = O(1)$$

$$5n^2 - 17n \sim 5n^2$$

$$\Rightarrow v_n = O(5n^2) = O(n^2)$$

Propriété 15

$$\| u_n = O(1) \iff \text{la suite } (u_n) \text{ est bornée}$$

Propriété 16 : linéarité

$$\| \text{Soient trois suites } u, v, w \text{ et } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ [u_n = O(w_n) \text{ et } v_n = O(w_n)] \Rightarrow (\lambda u_n + \mu v_n) = O(w_n)$$

Propriété 17 :

$$\| \text{Soient deux suites } (u_n), (v_n) \\ \left\{ \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n) \\ u_n \sim v_n \Rightarrow [u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(u_n)] \end{array} \right.$$

Démonstration :

$$\bullet u_n = o(v_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Rightarrow \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \text{ est bornée} \\ \Rightarrow u_n = O(v_n)$$

$$\bullet u_n \sim v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \text{ est bornée} \\ \Rightarrow u_n = O(v_n)$$

$$\text{Et de même } u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n \Rightarrow v_n = O(u_n)$$

$$u_n = O(v_n) \text{ et } v_n \sim \lambda \cdot w_n \Rightarrow u_n = O(w_n) \quad (\text{avec } \lambda \text{ non nul}) \quad \text{fin demo}$$

Propriété 18 DL (du pauvre)

$$\| \text{Si } f \text{ admet un DL à l'ordre } n \text{ en } 0 : \\ \text{Alors on a } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + O(x^n)$$

Exemple 1 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \text{ en } 0$$

$$\bullet \text{Exemple 2 : } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + 0 \cdot x^6 + o(x^6) \quad \text{car } \tan \text{ est impaire}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + 0 \cdot x^6 + O(x^7)$$

Démonstration

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}) \\ = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^{n+1}(a_{n+1} + o(1))$$

$$\text{On est en } 0 \Rightarrow o(1) \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} + o(1) \rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} + o(1) \text{ est bornée}$$

$$\text{cad } (a_{n+1} + o(1)) = O(1)$$

$$\Rightarrow x^{n+1}(a_{n+1} + o(1)) = O(x^{n+1})$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

fin demo

Propriété 19 (Critère 5) : domination

$$\| \text{Soient } (\Sigma u_n) \text{ et } (\Sigma v_n) \text{ deux séries à termes positifs telles que} \\ u_n = O(v_n) \\ \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si la série } (\Sigma v_n) \text{ converge, alors } (\Sigma u_n) \text{ converge} \\ \bullet \text{ Si } (\Sigma u_n) \text{ diverge, alors } (\Sigma v_n) \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

Démonstration

$$\text{On a } u_n = O(v_n) \text{ Donc il existe } C \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C|v_n|$$

$$\text{Et comme les séries sont à termes positifs : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq C \cdot v_n$$

Supposons que la série } (\Sigma v_n) \text{ converge}

$$\text{Posons } S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

La série } (\Sigma v_n) \text{ converge, donc la suite croissante } (T_n) \text{ est majorée par}

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

cad $T_n = \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq C \cdot v_n$

$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq C \cdot \sum_{k=0}^n v_k \leq C \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ qui est une constante par rapport à n

La série de TG u_n est à termes positifs, donc la suite (S_n) est croissante et de plus majorée

Donc la série (S_n) converge

La suite $(\sum u_k)$ est donc convergente

- La deuxième propriété s'obtient par contraposée

fin demo

5 Séries complexes

Propriété 20 : Convergence

La série *complexe* $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries *réelles* $\sum \text{Re}(u_n)$ et $\sum \text{Im}(u_n)$ convergent.

Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re}(u_n) + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im}(u_n)$

Propriété 21 : Convergence absolue / simple

Si la série (à termes positifs) $(\sum |u_n|)$ converge alors la série complexe $(\sum u_n)$ converge (simplement).

Dans ce cas, on dit que la série $(\sum u_n)$ **converge absolument**.

De plus

Donc La convergence absolue implique la convergence simple.

Et la réciproque est fausse.

Exemple

$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge (voir ci-dessus)

mais $\sum_{k \geq 1} |u_k| = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge

Donc la réciproque est bien fausse.

• Exemple 1 : $\sum_{k \geq 1} \frac{10-k}{k^3+1} = - \sum_{k \geq 1} \frac{k-10}{k^3+1}$

$\frac{k-10}{k^3+1} \sim \frac{1}{k^2}$ série à termes positifs (à partir d'un certain rang)

Blablabla

\Rightarrow la série converge

Conclusion : Pas besoin de la convergence absolue ici

• Exemple 2 : $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$

$|u_k| = \left| \frac{(-1)^k}{k^2+1} \right| = \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2}$ pour $k \geq 1$

Or la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et les séries sont à termes positifs.

Donc la série $\sum_{k \geq 1} |u_k|$ converge et donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ converge absolument.

• Exemple 3 : Nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin k}{k^2+1} = \sum_{k \geq 1} u_k$?

$|u_k| = \left| \frac{\sin k}{k^2+1} \right|$ et $|\sin k| = O(1) \Rightarrow \left| \frac{\sin k}{k^2+1} \right| = O\left(\frac{1}{k^2+1}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Or $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (Série de Riemann) et séries à termes positifs

Donc $\sum_{k \geq 1} |u_k|$ converge \Rightarrow la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge absolument (donc converge simplement)

Définition 7 : Parties positive, négative, d'un réel

On pose $x^+ = \max(0, x)$ $x^- = \max(0, -x)$
qui sont appelés les parties positive et négative d'un nombre

(Rien à voir avec les limites à gauche ou à droite)

Remarque : la partie négative d'un réel est **positive** ! (De même que la partie imaginaire d'un complexe est réelle).

$$5^+ = 5, \quad 5^- = 0, \quad (-5)^+ = 0, \quad (-5)^- = 5$$

$$\text{Si } x \geq 0, \quad x^+ = x, \quad x^- = 0$$

$$\text{Si } x \leq 0, \quad x^+ = 0, \quad x^- = -x$$

Propriété 22

$$\| \forall x \in \mathbb{R}, \quad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-$$

Démonstration de convergence absolue \Rightarrow convergence simple

Montrons : $(\sum |u_n|)$ converge \Rightarrow $(\sum u_n)$ converge

- Le cas réel :

Supposons donc la convergence absolue de la série $\sum u_n$

Donc la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge

$$\text{Or on a : } (u_n)^+ + (u_n)^- = |u_n| \quad \text{avec } (u_n)^+ \geq 0, \quad (u_n)^- \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (u_n)^+ \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq (u_n)^- \leq |u_n|$$

Or la série à termes positifs $(\sum |u_n|)$ converge

Donc les séries à termes positifs $\sum (u_n)^+$ et $\sum (u_n)^-$ convergent

$$\Rightarrow (\sum (u_n)^+) - (\sum (u_n)^-) = \sum ((u_n)^+ - (u_n)^-) = (\sum u_n) \quad \text{converge}$$

- Le cas complexe :

On suppose que la série $(\sum u_n)$ converge absolument

Cad : la série réelle à termes positifs $\sum |u_n|$ converge

$$\text{Or } |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$$

Donc, par comparaison, les séries à termes positifs $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ convergent

Cad les séries $(\sum \operatorname{Re}(u_n))$ et $(\sum \operatorname{Im}(u_n))$ convergent (absolument)

Donc la série $(\sum \operatorname{Re}(u_n) + i \sum \operatorname{Im}(u_n)) = (\sum u_n)$ converge

fin demo

Propriété 23 : Convergence absolue : Inégalité triangulaire

Si la série $(\sum u_n)_{n \geq p}$ converge absolument.

$$\| \text{Alors} \quad \left| \sum_{k=p}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=p}^{+\infty} |u_k|$$

Propriété 24 : domination (cas complexe)

Soit (z_n) une suite complexe et (v_n) une suite réelle positive

Si $z_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge

Alors $\sum z_n$ converge absolument et donc converge (simplement).

$$z_n = O(v_n) \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq C \cdot v_n$$

La série $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum C \cdot v_n$ converge

\Rightarrow la série $\sum |z_n|$ converge

\Rightarrow la série $\sum z_n$ converge absolument

Propriété 25 : Séries exponentielles complexes

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les séries } \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \text{ convergent pour tout } z \in \mathbb{C} \\ \text{Et on a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \end{array} \right.$$

En particulier :

Propriété 26 : Séries exponentielles réelles

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les séries } \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ convergent pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \text{Et on a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \end{array} \right.$$

Propriété 27 : Séries géométriques complexes

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les séries } \sum_{n \geq 0} z^n \text{ convergent pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1 \\ \text{Et on a } \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z} \end{array} \right.$$

6 Comparaison série / intégrale**Propriété 28 : Comparaison série, intégrale**

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ est décroissante, alors} \\ \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt \\ \bullet \text{ Si } f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ est croissante, alors} \\ f(0) + \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t) dt \end{array} \right.$$

Démonstration

- Soit f décroissante sur \mathbb{R}

Pour $t \in [k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$$\Rightarrow S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq S_{n-1}$$

$$\Rightarrow S_n \leq \int_0^n f(t) dt + f(0)$$

$$\text{Et } \int_0^n f(t) dt \leq S_{n-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{n+1} f(t) dt \leq S_n$$

Ce qui donne la propriété voulue

- Soit f décroissante

Alors $-f$ est décroissante

$$\Rightarrow \int_0^{n+1} -f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n -f(k) \leq \int_0^n -f(t) dt + (-f(0))$$

$$\Rightarrow \int_0^n f(t) dt + f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

fin demo

Exemple : Séries de Riemann : $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

- 1^{er} cas : $\alpha < 0 \Rightarrow f(x) = x^{-\alpha} \Rightarrow f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Donc la série diverge grossièrement.

- Si $\alpha = 0 \Rightarrow f(n) = 1$ divergence grossière

- 3^{ème} cas : $\alpha > 0$

$f(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

f est décroissante sur $[1, +\infty[$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t) dt$$

Pour $x \geq 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

§ 1^{er} cas : $\alpha = 1$

$$\Rightarrow F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x$$

$$\Rightarrow \int_1^{n+1} f(t) dt = F(n+1) = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

$$\text{Or } \int_1^{n+1} f(t) dt \leq S_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

La série diverge donc

§ 2^{me} cas : $\alpha \neq 1, \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \int_1^x t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x \\ &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{(-\alpha+1)} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

§ Quand $\alpha > 1$

$$F(x) = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1} \text{ pour } x \geq 1 \text{ Or}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{n+1} f(t) dt$$

$$\Rightarrow S_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

S_n est majorée par une constante. Série à termes positifs
Donc la série converge

§ Quand $0 < \alpha < 1 \iff 1 - \alpha > 0$

$$F(x) = \frac{1}{(-\alpha+1)} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1)$$

Quand $x \rightarrow +\infty, x^{1-\alpha} \rightarrow +\infty \Rightarrow F(x) \rightarrow +\infty$

$$\text{Or } \int_1^{n+1} f(t) dt \leq S_n \Rightarrow F(n+1) \leq S_n$$

Quand $n \rightarrow +\infty, F(n+1) \rightarrow +\infty \Rightarrow S_n \rightarrow +\infty$

La série diverge.

7 Développement décimal