

1 Ensembles finis

1.1 Propriétés des ensembles finis

Définition 1 : Cardinal (aucun rapport avec Armand Jean du Plessis)

Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de $[[1, n]]$ dans E .
 On dit alors que E est de cardinal n .
 Dans le cas contraire, on dit que E est infini.
 On note indifféremment $\text{Card}(E) = \#E = |E| = n$
 Par convention : $|\emptyset| = 0$

Définition 2 : ensembles disjoints

Deux ensembles sont **disjoints** ssi $A \cap B = \emptyset$

Propriété 1 : Union disjointe

Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une familles d'ensembles finis deux à deux disjoints,

$$\text{alors : } \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|$$

Définition 3 : Partition

On appelle partition de E une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'ensemble deux à deux disjoints tels que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

Propriété 2 : Partition

si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de E , alors $|E| = \sum_{i=1}^n |A_i|$

Propriété 3 : Union

Soient A et B deux ensembles finis
 Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Démonstration

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ union disjointe

Donc $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ union disjointe

$\Rightarrow |A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$

$$\Rightarrow |A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A \setminus B| + |B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

fin demo

Propriété 4 : Produit

Soient E_1, E_2, \dots, E_n , n ensembles finis.

Alors $E_1 \times \dots \times E_n = \prod_{1 \leq k \leq n} E_k$ est fini

$$\text{et } |E_1 \times \dots \times E_n| = \prod_{1 \leq k \leq n} |E_k|$$

En particulier : $\text{Card}(E^n) = (\text{Card } E)^n$

Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Démonstration

Posons $\text{Card } E_1 = p_1$, $\text{Card } E_n = p_n$.

Pour construire un élément (a_1, a_2, \dots, a_n) de $E_1 \times \dots \times E_n$, il faut choisir

- un élément a_1 de E_1 (p_1 choix),

- puis un élément a_2 de E_2 (p_2 choix),

- ...

- puis un élément a_n de E_n (p_n choix).

On a donc au total $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ éléments dans $E_1 \times \dots \times E_n$.

fin demo

Propriété 5

Soit E un ensemble fini et A un sous ensemble de E

Alors A est fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$

De plus $E = A \iff \text{Card } A = \text{Card } E$

Propriété 6 : applications

Soient A et B deux ensembles finis et $f : A \rightarrow B$

• Si f est injective alors $|A| \leq |B|$

• Si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$

• Si f est bijective, alors $|A| = |B|$

Propriété 7 : « toutourien »

Soient A et B deux ensembles **finis** de **même cardinal** et $f : A \rightarrow B$
 Alors f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective

2 listes**2.1 p -listes****Définition 4 : p -listes**

On appelle p -liste parmi n toute suite (a_1, \dots, a_p) de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ,
 c'est-à-dire tout élément de E^p avec $|E| = n$.

- l'ordre est important
- la répétition est possible

Exemple : $E = \{a, b, c, d\}$

3-listes d'éléments de E : (a, a, a) , (a, a, b) , (a, b, a) , (a, b, d) , etc.

Combien y en a-t-il ?

Je choisis le premier élément : 4 choix

PUIS Je choisis le deuxième élément : 4 choix

PUIS Je choisis le troisième élément : 4 choix

Total : $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

Attention : $(a, b, c) \neq (c, b, a)$ et $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$

Situation type : Tirages successifs de p boules dans une urne avec remise

- Les tirages sont successifs, donc l'ORDRE est important
- Avec remise : donc la RÉPÉTITION est possible

Propriété 8

Une p -liste est aussi une application de $\{1, \dots, p\}$ dans E .

Exemple : $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow E$

$(a, a, a) \iff f(1) = a, f(2) = a, f(3) = a$

$(a, b, d) \iff f(1) = a, f(2) = b, f(3) = d$

, etc.

En effet, si f est une application de $\{1, \dots, p\}$ dans E .

On obtient alors : $f(1), f(2), \dots, f(p)$ une suite de p éléments de E .
 $(f(1), f(2), \dots, f(p))$ est donc une p -liste de E .

Propriété 9

Il y a n^p p -listes d'un ensemble à n éléments.
 Il y a n^p applications de $\{1, \dots, p\}$ dans $[[1, n]]$.

Explication

On choisit le 1^{er} élément : n choix
 puis on choisit le 2^{ème} élément : n choix

 puis on choisit le p ^{ème} élément : n choix
 Total : $n \times n \times \dots \times n = n^p$

Propriété 10

Soit E et F deux ensembles finis.
 Il y a $|F|^{|E|}$ applications de E dans F .

Définition 5 (notation) Ensemble des applications

- L'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E
- Une suite à valeurs dans E est une application de \mathbb{N} dans E
- L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$

2.2 Arrangements**Définition 6 : Arrangements**

On appelle arrangement de p éléments parmi n toute p -liste d'éléments distincts d'un ensemble E contenant n éléments.

- l'ordre est important
- pas de répétition

Exemple : $E = \{a, b, c, d, e\}$

- Arrangements possibles : $(a, c, d) \neq (a, d, c), (a, e, b)$
- (a, c, c) impossible

Nombre d'arrangements de 3 parmi 5 ?

Il existe donc 15! manières différentes de manger ces petits pois un par un. (Pour pouvoir épuiser toutes les potentialités gustatives que cela procure, à raison de 2 repas par jours, il suffit d'environ : 4 970 ans. Ramsès II y est encore attelé... Il n'en a plus que pour 1 600 ans et des poussières.)

2.4 Combinaisons

Propriété 16 : Ensemble des parties

Soit E un ensemble à n éléments
 L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E est noté : $\mathcal{P}(E)$
 On a alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|} = 2^n$

$$E = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

Démonstration

$E = \{a_1, \dots, a_n\}$
 On choisit pour chacun des n éléments s'il appartient ou non au sous-ensemble A .
 On a n fois 2 choix possibles $\Rightarrow 2^n$ choix au total.
 On peut ainsi établir une bijection f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}^n$ définie pour $A \in \mathcal{P}(E)$ par

$$f(A) = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \quad \text{avec} \quad x_i = 1 \iff a_i \in A.$$

fin demo

Remarque Tout sous ensemble de E peut être codé par une suite de 0 et de 1

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\emptyset \iff (0, 0, 0)$$

$$\{a, c\} \iff (1, 0, 1)$$

$$\{b, c\} \iff (0, 1, 1)$$

On peut faire de même avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\{\text{pair}\} \iff (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \iff \overline{0, 1010101010\dots}^{(2)} \quad (\text{en notation binaire})$$

$$\text{avec} \quad \overline{0, 1010101010\dots}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3} \in [0, 1]$$

Cela permet de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a même cardinal que $[0, 1]$, qui lui même a même cardinal que \mathbb{R}

Or on peut montrer que \mathbb{N} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne peuvent pas avoir le même cardinal

Donc \mathbb{N} et \mathbb{R} n'ont pas le même cardinal.

Définition 8 : Combinaisons

On appelle combinaison de p éléments parmi n toute partie à p éléments d'un ensemble E contenant n éléments.

- pas d'ordre
- pas de répétition

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Combinaisons de 2 parmi 4 :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

Combinaisons de 3 parmi 4 :

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

Le but du jeu est de déterminer, par exemple, le nombre de combinaisons de 3 parmi 5 :

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

On a par exemple : $\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, b, e\}$, etc.

L'idée est de faire correspondre les arrangements et les combinaisons.

Avec une combinaison de 3 éléments, par exemple $\{a, b, e\}$

on peut fabriquer $3! = 6$ arrangements.

Ce sont toutes les permutations de ces trois éléments) :

$$(a, b, e), (a, e, b), (b, e, a), (b, a, e), (e, b, a), (e, a, b)$$

Donc a toute combinaison correspond un ensemble de 6 arrangements

$$1 \text{ combinaison} \leftrightarrow 6 \text{ arrangements}$$

Ces ensembles forment une participation de l'ensemble de toutes les arrangements

Or on connaît le nombre total d'arrangements de 3 éléments parmi 5 :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Donc

$$6 \text{ arrangements} \iff 1 \text{ combinaison}$$

$$\Rightarrow \frac{5!}{2!} = 60 \text{ arrangements} \iff \frac{5!}{2!3!} = \frac{60}{6} = 10 \text{ combinaisons}$$

Propriété 17

Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté $\binom{n}{p}$
 (qu'on lit : p parmi n)
 et qui est égal à $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Attention

Il n'y a pas d'ordre : $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
 Il n'y a pas de répétition : $\{a, a, b\}$ est impossible

Calcul : Combien y-a-il de combinaisons de p éléments parmi n
 Le raisonnement est le même que dans l'exemple

Il a $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p parmi n

Pour chaque combinaison donnée de p éléments, il y a $p!$ arrangements possibles

$p!$ arrangements \leftrightarrow 1 combinaison

Au total :

$$\frac{n!}{(n-p)!} \text{ arrangements } \leftrightarrow \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \text{ combinaisons}$$

Situation type :

On tire simultanément p boules dans une urne en contenant n .

Propriété 18 : Conséquence

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Soit E un ensemble à n éléments

On fait une partition de $\mathcal{P}(E)$: $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^n A_p$

où A_p est l'ensemble des parties de E contenant p éléments

D'après ce qui précède : $|A_p| = \binom{n}{p}$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n |A_p| = |\mathcal{P}(E)| = 2^n$$

Propriété 19 : Suites strictement croissantes

Il existe $\binom{n}{p}$ suites strictement croissantes de p éléments de $\{1, \dots, n\}$

$$\{5, 7, 3, 2\} \longleftrightarrow (2, 3, 5, 7)$$

Une suite strictement croissante de p éléments de $\{1, \dots, n\}$ est une suite (x_1, \dots, x_p) de p éléments de $\{1, \dots, n\}$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$

- $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ donc on a p éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$
 $\{x_1, \dots, x_p\}$ est donc une p combinaison de $\{1, \dots, n\}$

A toute suite correspond donc une unique combinaison.

- Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ une p combinaison de $\{1, \dots, n\}$

Les p éléments sont distincts, donc il existe une unique façon de les ranger par ordre strictement croissant.

Donc à toute p combinaison correspond une unique suite strictement croissante.

Résumé :

Si on prend p éléments parmi n .

	ordre important	pas d'ordre
répétitions	p -liste n^p	Combinaisons avec répétitions ????
pas de répétition	arrangement $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	combinaison $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercice

Dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 vertes, on tire simultanément 4 boules.

- Combien y a-t-il de résultats possibles ?
- Combien de résultats avec 1 rouge et 3 vertes ?
- Combien de résultats avec au moins une rouge ?

- a) On tire simultanément 4 boules parmi 10 : pas d'ordre et pas de répétition. Le nombre de résultats possibles est :

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

- b) 1 rouge et 3 vertes :

Il faut choisir

1 rouge parmi 4 : 4 choix

$$\text{puis 3 vertes parmi 6 : } \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ choix}$$

$$\text{Total : } 4 \times 20 = 80 \text{ choix}$$

- c) \bar{A} = « au moins une rouge »

\bar{A} = « pas de rouge » = « que des vertes » = « 4 vertes parmi 6 »

$$\text{Card}(\bar{A}) = \binom{6}{4} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{A}) = 210 - 15 = 195$$

Autre méthode :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

avec A_1 : on a tiré exactement une rouge

\iff on prend une rouge et 3 vertes

$$\text{Card } A_1 = \text{Card } b) = 80$$

A_2 on a tiré exactement deux rouges

\iff on prend 2 rouges parmi 4 puis 2 vertes parmi 6

$$\text{Card}(A_2) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$$

A_3 : on a tiré exactement 3 rouges

\iff on prend 3 rouges parmi 4 puis 1 vertes parmi 6

$$\text{Card}(A_3) = \binom{4}{3} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$$

A_4 : on a tiré exactement 4 deux rouges

\iff on prend 4 rouges parmi 4 puis 0 vertes parmi 6

$$\text{Card}(A_4) = \binom{4}{4} \times \binom{6}{0} = 1 \times 1 = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} |A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \quad \text{car union disjointe} \end{aligned}$$

$$|A| = 195$$

Même résultat que précédemment ne qui est assez rassurant.