

1 Univers, événements

Définition 1

- On appelle **univers** l'ensemble de résultats possibles et on le note Ω .
- Un **événement** est un sous ensemble de Ω .
- Les singletons de Ω (parties à un seul élément) sont appelés des **événements élémentaires**

a) Lancer d'un dé : $\Omega = \dots\dots\dots$

b) On lance 5 fois un dé

Un évènement élémentaire est par exemple : $\omega = \dots\dots\dots$

Les évènements élémentaires sont donc $\dots\dots\dots$

$$\Omega = \dots\dots \quad |\Omega| = \dots\dots$$

c) On lance n fois un dé : $\Omega = \dots\dots \quad |\Omega| = \dots\dots$

d) Urne 4 boules rouges, 5 noires, 6 vertes. On tire une boule

$$\Omega = \dots\dots\dots \quad \text{ou} \quad \Omega = \dots\dots\dots$$

Définition 2 : Incompatibilité

- A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire qu'ils ne peuvent avoir lieu en même temps)
- Les événements (A_1, A_2, \dots, A_n) sont deux à deux incompatibles ssi $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

Définition 3 : Système complet d'événements

- $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements si et seulement si c'est une partition de Ω c'est-à-dire
- Les A_i sont deux à deux incompatibles ($\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$)
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

ou encore

Définition 4

$(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements si et seulement si tout élément de Ω appartient à un des ensembles A_i et un seul

Exemple : $\Omega = \llbracket 0; 10 \rrbracket \quad A = \{1, 4, 7, 10\} \quad B = \{2, 5, 8\} \quad C = \{3, 6, 9\}$
 (A, B, C) est un système complet d'événements.

2 Probabilité

Définition 5

Une probabilité est une application $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout événement A associe un nombre réel noté $p(A)$ telle que :

- Pour tout événement $A, 0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\Omega) = 1$
- Pour tous événements A et B incompatibles $P(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété 1

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles, alors $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$
- Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$

Exemple : Soit un dé pipé à 6 faces tel que $p(i) = a.i$ pour $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$

- Déterminer a
- Déterminer $p(A)$ avec $A = \llcorner$ le résultat obtenu est pair \lrcorner

Propriété 2 : Formules utiles

- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B)$
- $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \cdot p(\bar{B}|A) = p(A \cup B) - p(B)$

3 Probabilité conditionnelle

Définition 6

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B|A) = \dots\dots\dots$$

Exemple : On reprend le dé précédent

- a) Calculer la probabilité d'avoir tiré le n°1 sachant que le résultat obtenu est impair
- b) Calculer la probabilité d'avoir un numéro pair sachant que le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4
- c) Calculer la probabilité d'avoir que le résultat qu'il est obtenu qu'il est supérieur ou égal à 4 sachant le numéro qu'il est pair

Propriété 3 : Formule des probabilités composées

- $P(A \cap B) = P(A) \dots\dots$
- $P(A \cap B \cap C) = \dots\dots\dots$
- $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)$

$$= \dots\dots\dots$$

Exemple : Urne avec 3 noires et 2 rouges

On tire successivement 3 boules. Après chaque tirage, on remet la boule tirée plus une autre de la même couleur

Calculer la probabilité d'avoir tiré 3 boules rouges.

4 Formule des probabilités totales

Même exemple : Que vaut $P(R_2)$?

Propriété 4 : FPT avec (A, \bar{A})

$$p(B) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Propriété 5 : FPT (Forme conjointe)

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une système complet d'événements et B un évènements. On a alors la formule des probabilité totales (FPT) :

$$p(B) = \dots\dots\dots$$

$$= \sum \dots\dots\dots$$

Propriété 6 : FPT (Forme conditionnelle)

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une système complet d'événements et B un évènements. On a alors la formule des probabilité totales (FPT) :

$$p(B) = \dots\dots\dots$$

$$= \sum \dots\dots\dots$$

Remarque : si $P(A_k) = 0$ on pose $P_{A_k}(B) = n'$ importe quoi.

Exemple

Une première urne U contient 6 boules : 3 avec le n°1, 2 avec le n°2 et 1 avec le n°3
 On a une série de 3 urnes numérotées de 1 à 3. L'urne V_i contient 1 boule blanche et i boules rouges.
 On tire une boule dans l'urne U . Si le numéro tiré est i , alors on tire une boule dans l'urne i .
 Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

Propriété 7 Formule de Bayes

||

5 Un cas très particulier : l'équiprobabilité

Définition 7

Soit Ω un univers fini
 On dit qu'il y a **équiprobabilité** si et seulement si tous les événements élémentaires (c'est-à-dire les singletons) ont la même probabilité)

Exemple 1 : On lance un dé équilibré
 $p(\{1\}) = p(\{2\}) = \dots = p(\{6\}) = 1/6$
 Tous les singletons ont la même probabilité. Il y a donc bien équiprobabilité

Propriété 8

Soit Ω un univers fini et A un événement de Ω
 S'il y a équiprobabilité, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

Exemple 2 : Une urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 vertes, 6 noires
 On tire simultanément 3 boules
 a) Calculer la probabilité d'avoir exactement une rouge
 b) Probabilité d'avoir au moins une verte
 c) On a obtenu exactement une rouge. Quelle est alors la probabilité d'avoir au moins une verte

Remarque Dans ce genre d'exercice, il est essentiel de d'abord définir précisément le cadre dans lequel on va travailler, et de s'y tenir dans la suite

- quelles sont les résultats possibles?
- y a-t-il équiprobabilité?
- Card (Ω)?

5.1 Probabilités conditionnelles

Propriété 9

On ne tripatouille jamais la condition

Par contre, si la condition reste la même, on peut utiliser les propriétés élémentaires sur les probabilités :

Ainsi $P(B) = 1 - P(\bar{B})$ $p_A(B) = 1 - P_A(\bar{B})$
 $p(B \cup C) = p(B) + P(C) - p(B \cap C)$ $p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C) - p_A(B \cap C)$

Propriété 10

- $p_A(B) = 1 - P_A(\bar{B})$
- $p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C) - p_A(B \cap C)$
- Si B et C sont disjoints $p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C)$

Propriété 11

Si A est un événement de proba non nulle.
 Alors P_A définit une loi de probabilité

Exemple :

Dans une urne U on tire successivement deux boules sans remise
 $U = \{3R, 4V, 5N, 6J\} = 18$ boules
 $P(N_2)?$ $P_{N_1}(N_2)?$ $P_{V_1}(N_2) = ?$ $P_{N_1 \cup V_1}(N_2) = ?$

6 Indépendance en probabilité

Idée : A et B indépendants si et seulement si la réalisation de l'un des événements n'influence pas la proba d'avoir l'autre
 Donc $P(A|B) = P(A)$

$\iff \dots \iff \dots$

Exemple trivial (=à la noix)

$P(6 \text{ avec un dé puis Face avec pièce}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ Waouhhhh

Définition 8 : événements indépendants

Soient A et B deux événements.
 A et B sont indépendants en probabilité si et seulement si
 $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Propriété 12

Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} ; \bar{A} et B ; \bar{A} et \bar{B} le sont également.

Propriété 13

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont indépendants
 $\iff P(A|B) = P(A)$
 $\iff P(A) = P(A|\bar{B})$
 $\iff P(B|A) = P(B)$

Définition 9 : Événements deux à deux indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.
 On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **deux à deux** indépendants si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants.}$$

Définition 10 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.
 On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement** indépendants si :
 Pour toute sous-famille $J \subset I$ d'indices de I ,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

(A_1, A_2, A_3) sont mutuellement indépendants si et seulement si

- $P(A_1) = P(A_1)$ trivial etc.
- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$ idem avec (A_2, A_3) et avec (A_1, A_3)
 \Rightarrow indépendance deux à deux
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$

Cela signifie que quels que soient un nombre fini d'événements pris dans la famille, ils vérifient la propriété d'indépendance.

Propriété 14 : indépendances

Si une famille d'événements sont **mutuellement** indépendants
 Alors ils sont aussi **deux à deux** indépendants
Attention : la réciproque est fausse

Exemple

On lance deux pièces équilibrées.

$P_1 \iff$ la première donne pile

$P_2 \iff$ la deuxième donne pile

$M \iff$ les deux pièces donnent le même résultat

Les 3 événements sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exemple :

On lance n fois une pièce déséquilibrée telle que $p(F) = p \in]0, 1[$
 Proba d'avoir obtenu n fois Face?

Exemple 3 : Si (A, B, C) sont mutuellement indépendants
 Qu'en est-il de (\bar{A}, B, C) ? de (\bar{A}, B, \bar{C}) ?

On généralise ainsi :

Propriété 15 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements **mutuellement** indépendants et E_i une famille d'événements tels que $E_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$
 Alors $(E_i)_{i \in I}$ est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants

Propriété 16 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements **mutuellement** indépendants
 alors toute sous-famille est également formée d'événements mutuellement indépendants