Exercice 1 Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

3) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 4) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$

5) $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$ 6) $u_n = \dfrac{n^2+3n+4}{2(n+1)^4+\ln(n)}$

7) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ 8) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$

9) $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$ 10) $u_n = \dfrac{(-1)^n\tan(1/n).n^2}{\mathrm{e}^{n/2}}$

11) $u_n = \dfrac{3n^2-\ln(n+1)}{5(n+1)^3}$ 12) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

Exercice 2 Étudier la convergence des séries de terme général

1) $u_n = \sin(1/n) + \ln(\frac{n-1}{n})$ 2) $v_n = \tan\frac{1}{n} + \ln\frac{n+1}{n}$

Exercice 3 On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.

Exercice 4 Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants. 1) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

2) $u_n = \ln\left(\dfrac{2+\sin(1/n)}{2-\sin(1/n)}\right)$ 3) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Exercice 5 On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

b) Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$ encadrer $\displaystyle\int_n^p \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ par des sommes de termes $1/k^3$

c) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 6 Démontrer la convergence de la série de terme général $n\mathrm{e}^{-n^2}$, puis montrer que ses restes R_n vérifient $|R_n| \leq \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}$ pour tout $n \geq 1$

Exercice 7
À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$

Exercice 8
Soit $a \in]0,\ 1[$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$

Exercice 9
En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$ (b) $\ln(n!) \sim n\ln n$