

Exercice 1

Démontrer par un raisonnement de dénombrement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} & \text{b)} \quad & \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \\ \text{c)} \quad & \binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \\ \text{d)} \quad & \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} \quad \text{avec la convention } \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n \end{aligned}$$

Exercice 2 On tire dans un jeu de 32 cartes 4 cartes une à une sans remise. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

- A) Au total
- B) la 1^{ère} carte est un carreau
- C) uniquement les 2 premières cartes sont des carreaux
- D) on a exactement 2 carreaux
- E) on a au moins un carreau ?
- F) la première carte est un carreau et la deuxième n'est pas un roi.
- G) la 3^{ème} carte est un carreau

Exercice 3 Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 4 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

- A) Au total
- B) il y a exactement 1 carreau ?
- C) il y a au plus 3 carreaux ?
- D) il y a exactement un carreau et exactement un roi ?
- E) il y a exactement un carreau ou exactement un roi ?

Exercice 4 Dans une urne contenant 12 boules : 4 rouges, 5 noires, 3 vertes, on tire sans remise successivement 3 boules. Combien de résultats possibles

- A) au total
- B) les trois boules sont rouges
- C) aucune boule n'est rouge

- D) la 3^{ème} boule est rouge
- E) au moins une boule est rouge
- F) exactement une boule est rouge
- G) la 3^{ème} est noire et la 2^{ème} est verte
- H) la 1^{ère} n'est pas rouge et la 2^{ème} est verte
- I) la 1^{ère} est verte ou la 3^{ème} est rouge
- J) la première n'est pas rouge et la deuxième n'est pas noire et la 3^{ème} n'est pas verte
- K) la première n'est pas rouge ou la deuxième n'est pas noire ou la 3^{ème} n'est pas verte

Exercice 5

- 1) Quel est le nombre de suites strictement croissantes de 3 entiers choisis dans $[[1; 10]]$? (On remarquera qu'à toute suite strictement croissante correspond une unique combinaison et réciproquement)
- 2) Quel est le nombre de suites croissantes de 3 entiers choisis dans $[[1; 10]]$? On montrera qu'à toute suite croissante de 3 entiers on peut associer une suite strictement croissante de 3 entiers dans $[[1; 12]]$ et réciproquement
- 3) Quel est le nombre de suites croissantes de 4 entiers choisis dans $[[1; 10]]$?

Exercice 6 On se propose de monter un escalier contenant n marches. On peut à chaque étape décider de monter d'une marche ou bien de 2 marches. On note p_n le nombre de façons différentes de monter les n marches.

- 1) Montrer que $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$
- 2) Exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n
- 3) En déduire l'expression de p_n en fonction de n

Exercice 7 Soit E un ensemble de cardinal n .

- 1) Combien y a-t-il de couples de parties (A, B) de E tels que $A \cap B = \emptyset$? (NB : $A \cap B = \emptyset \iff B \subset \overline{A}$)
tels que $A \cup B = E$?
- 2) Combien y a-t-il de triplets de parties (A, B, C) de E tels que :
 $A \cup B \cup C = E$ (poser $D = B \cup C$)