1) Pour $x > 0$, $\mathrm{e}^{-2\ln x} = \dfrac{1}{x^2}$ (C 057c)

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{ix}| = 1$ (C 242)

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n)' = n.x^{n-1}$ (C 406a)

4) $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq k\leq n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$ (C 535c)

5) Pour $n \geq 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$ (C 610b)

6) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 752e)

$f : E \to F$ est injective $\iff$ $\forall (x,\ y) \in E^2,\quad f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$

En effet c'est vérifié par toutes les fonctions (injectives ou non)
car par contraposée : $\forall (x,\ y) \in E^2,\quad x = y \quad\Rightarrow\quad f(x) = f(y)$

7) Soient $f : E \to F,\ g : F \to G$ deux applications (C 786a)
Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective

Supposons $g \circ f$ injective

Il faut montrer que $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \quad\Rightarrow\quad x = y$

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y) \quad\Rightarrow\quad g(f(x)) = g(f(y)$

$\Rightarrow\quad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad\Rightarrow\quad x = y$ car $g \circ f$ est injective

Donc f est injective.

8) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \to +\infty$ qd $x \to 0^+$ $\iff$ $\underline{\alpha < 0}$ (C 809b)

9) $\arctan(1) = \pi/4$ (C 912a)

Ne surtout pas écrire $\arctan(1) = \pi/4 + k\pi$. En effet $\arctan(1)$ correspond à une **unique** valeur, et non à une infinité car

$$\arctan(1) = x \iff \big(\tan x = 1 \text{ **ET** } x \in]-\pi/2,\ \pi/2[\big)$$

À ne pas confondre avec $\tan x = 1 \iff x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

10) $\displaystyle\int^u \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|u|$ sur $]-\infty,\ 0[$ et sur $]0,\ +\infty[$ (C 1052a)

Ne pas oublier la valeur absoule

11) Déterminer et justifer la limite de S_n (X 1142c)

pour $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n(k/n)+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k/n)+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

Somme de Riemann avec $f(t) = \dfrac{1}{2t+1}$, f est continue sur $[0, 1]$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(2t+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3$

12) Soit l'équation $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ (E 1162d)

Son équation caractéristique a pour racines

$r_1 = -1 + 2\mathbf{i}$ et $r_2 = -1 - 2\mathbf{i}$

Pour trouver une **solution particulière** y_p, on trouve d'abord

la fonction **complexe** φ de la forme $\underline{\varphi(x) = C.x.\mathrm{e}^{(-1+2\mathbf{i})x} \quad (C \in \mathbb{C})}$

solution de l'équation $\underline{y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{(-1+2\mathbf{i})x}}$

Et on a ensuite $\underline{y_p(x) = \mathrm{Im}(\varphi(x))}$

Pour $\varphi(x)$, il faut multiplier $\mathrm{e}^{(-1+2\mathbf{i})x}$ par x car $-1 + 2\mathbf{i}$ est racine simple du polynôme carateristique $r^2 + 2r + 5$

13) Définition : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ (C 1220c)

$\iff \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow u_n \leq A$

14) Donner les 4 premiers termes non nuls du DL suivant (C 1291)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

15) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 1421b)

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ avec $f(a) < y_0 < f(b)$

Alors il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$

16) Théorème de la limite de la dérivée : **Cas infini** (C 1606a)

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{x_0\}$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$

Alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

et C_f admet une tangente verticale en x_0

17) Condition **nécessaire** de convergence de la série $(\sum u_k)$: (C 1814a)

Si la série $(\sum u_k)$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

18) Critères de convergence d'une série : majoration globale (C 1831a)

la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ à termes positifs converge

$\iff$ il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$

Et dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq M$

19) Série géométrique : (C 1841a)

La série $\sum_{k \geq 0} x^k$ converge ssi $|q| < 1$

Et dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

20) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (C 1870

et calculer sa somme

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(1+k) - k}{k(k+1)} = \frac{(1+k)}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Donc la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

21) définition : $u_n = O(v_n)$ (u est dominée par v) (C 1880)

$\iff \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M|v_n|$

$\iff$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ est bornée

22) Définition : Un espace vectoriel E est de dimension n (C 2724b)

$\iff$ il existe une base de E contenant n vecteurs.

ou bien $\iff$ toute base de E contient n vecteurs.

23) Soient E et F deux e.v. de bases respectives (C 2850a)
$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que
$$f(e_1) = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \quad f(e_2) = 4u_1 + 5u_2 + 6u_3$$

Alors $\quad \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{U})}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Pas de flèche « $\rightarrow$ » : c'est réservé aux matrices de paasage

24) (Propriété) Soit $f : E \to F$ est une application <u>linéaire</u> (C 2911b)

$\mathrm{Im} f = F \iff f$ est surjective

25) Soient $f : E \to F$ une application linéaire injective (E 2945)
et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de E
Démontrer que $(f(u_1), \ldots f(u_p))$ est une famille libre de F

Soit $(a_1, \ldots a_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $a_1 f(u_1) + \cdots + a_p f(u_p) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad f(a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p) = \vec{0}$ car f est linéaire

$\Rightarrow \quad a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p \in \mathrm{Ker} f$

Or f injective $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$ $\Rightarrow$ $a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p = \vec{0}$

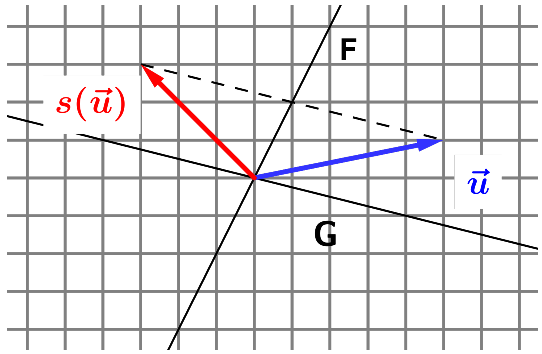
$\Rightarrow \quad (a_1, \ldots, a_p) = (0, \ldots, 0)$ car $(u_1, \ldots u_p)$ est libre

Donc $(f(u_1), \ldots f(u_p))$ est libre

26) Soit $E = F \oplus G$ et p la projection sur F parallèlement à G. (C 2951)

$p(u) = v \iff \underline{v \in F \quad \text{et} \quad v - u \in G}$

27) Représenter **précisement** l'image de $\vec{u}$ par la symétrie par rapport à F parallèlement à G (E 2969b)



28) <u>Vocabulaire</u> : Soit P un pôlynome et $a \in \mathbb{K}$ (C 3100)

$P(a) = 0 \iff a$ est une **racine** du polynôme P

$\iff a$ est une **solution** de l'équation $P(x) = 0$

29) Soient deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ P, Q non nuls (C 3112)

$\mathrm{d}^\circ(P + Q) \leq \max(\mathrm{d}^\circ P, \mathrm{d}^\circ Q)$

et si $\mathrm{d}^\circ P \neq \mathrm{d}^\circ Q \Rightarrow \mathrm{d}^\circ(P + Q) = \max(\mathrm{d}^\circ P, \mathrm{d}^\circ Q)$

30) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 3164a)

Tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$

Par exemple $X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (mais il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$