

1)  $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(i.z) = -\operatorname{Im}(z)$  (C 200a)

2)  $A, B$  deux points d'affixes respectives  $a, b$  non nulles (C 351f)  
 Interprétation géométrique :  $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \widehat{(OB, OA)}$  [2 $\pi$ ]

3) Pour  $x^2 \neq 1$  et  $n \geq 5$  (C 517b)  

$$\sum_{k=5}^n x^{2k} = \sum_{k=5}^n (x^2)^k = \frac{(x^2)^5 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{x^{10} - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

4)  $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad [x + y] = x + [y]$  (C 602d)

5) Définition  $f : E \rightarrow F$  n'est pas injective (C 752d)  
 $\iff \exists (a, b) \in E^2, f(a) = f(b) \text{ ET } a \neq b$

6) Montrons que  $\forall x \leq 0, \quad 0 < a \leq b \implies a^x \geq b^x$  (C 810e)  
 (Rappel : on a  $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ )  
 Soit  $x \geq 0$ . Supposons  $0 < a \leq b$   
 $\implies \ln a \leq \ln b$  (car  $\ln$  croissante sur  $]0, +\infty[$ )  
 $\implies x \cdot \ln a \geq x \cdot \ln b$  car  $x \leq 0$   
 $\implies e^{x \cdot \ln a} \geq e^{x \cdot \ln b}$  car  $\exp$  croissante sur  $\mathbb{R}$   
 $\implies a^x \geq b^x$

7)  $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{-3\pi}{5}\right)\right)$  (C 915b)  
 $= \arcsin\left(\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right)\right)$   
 $= \arcsin\left(\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right) = \frac{-2\pi}{5}$  car  $\frac{-2\pi}{5} \in [-\pi/2, \pi/2]$   
 Ou plus rapide :  
 $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\pi - \frac{-3\pi}{5}\right)\right)$   
 $= \arcsin\left(\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right) = \frac{-2\pi}{5}$  car  $\frac{-2\pi}{5} \in [-\pi/2, \pi/2]$   
 En utilisant  $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin(-\pi - x)$

8) Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto 4x + \sqrt{x}$  (C 1037b)  
**On admet** que  $f$  est bijective et on note  $f^{-1}$  sa réciproque  
 Calculer  $f(2)$ , justifier que  $f^{-1}$  est dérivable en 2  
 et déterminer  $(f^{-1})'(10)$

$f(2) = 8 + 2 = 10 \quad f'(x) = 4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies f'(2) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$f$  est dérivable en 2 et  $f'(2) \neq 0$

Donc  $f^{-1}$  est dérivable en  $10 = f(2)$  et  $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{4}{17}$

9) Écrire l'expression d'une somme de Riemann sur  $[0, 1]$  (C 1140b)

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{ou} \quad S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

10) Soit l'équation  $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$  (E) (E 1162c)  
 Son équation caractéristique a pour racines  $r_1 = 1$  et  $r_2 = -3$   
 Déterminer une solution particulière de (E)

$-3$  solution de l'EC donc  $y_P(x) = C.x.e^{-3x}$

$y'_P(x) = C.e^{-3x} + C.x.(-3)e^{-3x} = C(-3x + 1)e^{-3x}$

$y''_P(x) = C(-3)e^{-3x} + C(-3x + 1)(-3)e^{-3x} = C(9x - 6)e^{-3x}$

$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$

$\iff C[(9x - 6) + 2(-3x + 1) - 3x]e^{-3x} = e^{-3x}$

$\iff C[-4] = 1 \iff C = -1/4$  donc  $y_P(x) = \frac{-1}{4}x.e^{-3x}$

11) Limite classique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv e$  (C 1254a)

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$  avec  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  Or  $\ln(1 + X) \sim X$

$\implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$

$\implies n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \implies \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^1$

12) Soit  $f$  décroissante sur  $]a, b[$  avec  $a < b$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  (C 1415b)  
 Si  $f$  est majorée par  $M$   
 alors  $f$  admet une limite finie en  $a$   
 tel que  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \leq \lim_a f \leq M$

13) Paramétrage d'une corde : Soit  $f$  une fonction. (C 1490b)  
 Une équation paramétrique de la corde de  $C_f$  entre  $a$  et  $b$  est :  
 $x(t) = t.a + (1-t).b$ ,  $y(t) = t.f(a) + (1-t).f(b)$  avec  $t \in [0, 1]$

14) Définition : **Somme d'une série** (C 1804b)  
 Si la série de terme général  $(u_k)_{k \geq 0}$  converge  
 Alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$  est la **somme** de la STG  $(u_k)$

15) Critères de convergence d'une série : majoration globale (C 1831c)  
 la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  à termes positifs converge  
 $\iff$  il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$   
 Et dans ce cas, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq M$

16) propriété : Convergence d'une série complexe par domination (C 1853a)  
 Si  $(\sum u_n)$  est une série à termes complexes  
 $(\sum v_n)$  est une série réelle à termes positifs  
 telles que  $u_n = O(v_n)$  et  $(\sum v_n)$  converge  
 Alors la série  $(\sum u_n)$  converge absolument

17) Vrai ou Faux?... **Vrai** (C 1887a)  
 $2 \sin n \underset{+\infty}{=} O(1)$

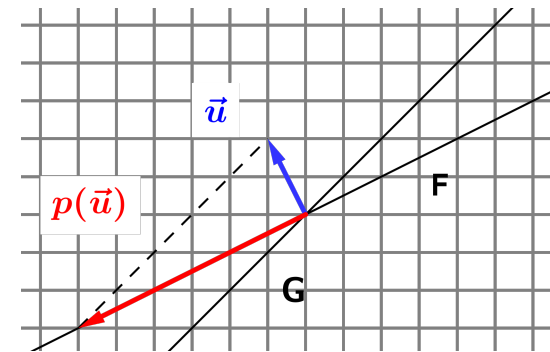
Car  $\forall n \in \mathbb{N}, |2 \sin n| \leq 2$  donc  $(2 \sin n)$  est bornée

18) Vrai ou Faux?... **Faux** (C 2713a)  
 $(u_1, \dots, u_n, v)$  liée  $\implies v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$   
 Il faut avoir aussi  $(u_1, \dots, u_n)$  libre

19) Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  (C 2850c)  
 et  $M = \text{Mat}_{(\mathcal{B})}(f)$ . Traduire par des **relations vectorielles**  
 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} f(e_1) = \vec{0} \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = 2e_3 \end{cases}$

20) Vocabulaire :  $f$  est une a.l. de  $E$  dans  $E$  (C 2924)  
 alors  $f$  est appelée un endomorphisme de  $E$

21) Représenter **précisément** l'image de  $\vec{u}$  par la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  (C 2969a)



22) **Condition suffisante sur les racines** : Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  (C 3136b)  
 Si  $P$  admet une infinité de racines dans  $\mathbb{K}$  alors  $P = 0$

- 23) Donner un exemple de polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  (C 3175d)  
qui n'admet aucune racine réelle, et qui n'est pas irréductible

Par exemple :  $P = (X^2 + 1)(X^2 + 2)$  ou encore  $P = (X^2 + 1)^2$

- 24) Une permutation est un arrangement de  $n$  éléments parmi  $n$  (C 3310d)

- 25) nombre d'applications injectives (C 3321)

d'un ensemble à  $a$  éléments vers un ensemble à  $b$  éléments

= le nombre d'arrangements de  $a$  parmi  $b = A_b^a = \frac{b!}{(b-a)!}$

pour déterminer une application injective, il faut déterminer  $(f(1), f(2), \dots, f(a))$  et donc on a  $b$  choix pour  $f(1)$ ,  $(b-1)$  pour  $f(2)$  ...

- 26) On tire 4 cartes une à une sans remise (E 3340)  
dans un jeu de 32 cartes.

Combien y a-t-il de résultats possibles où la 3<sup>ème</sup> carte est un carreau

3<sup>ème</sup> carte (=K) : 8 choix

1<sup>ère</sup> carte : 31 choix

2<sup>ème</sup> carte : 30 choix

4<sup>ème</sup> : 29 choix

Card(A) =  $8 \times 31 \times 30 \times 29$

- 27) Donner la formule des probabilités composées (C 4002)  
pour une famille d'évènements  $A, B, C$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{(A \cap B)}(C)$$

- 28)  $A$  et  $B$  sont indépendants  $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  (C 4006a)

- 29) Une urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 Vertes, 6 noires (C 4010b)

On tire simultanément 3 boules  $P(\text{Aucune n'est verte})$  ?

Tirage simultané donc combinaisons  $|\Omega| = \binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3!}$

Aucune n'est verte  $\iff \bar{V} \iff$  on tire 3 boules parmi 10

$$|\bar{V}| = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} \quad P(\bar{V}) = \frac{|\bar{V}|}{|\Omega|} = \frac{10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \frac{9 \times 8}{3 \times 7 \times 13}$$

- 30) Une urne contient initialement 2 boules rouges et 1 Verte (C 4014a)

On tire successivement 3 boules et on remet après chaque tirage la boule tirée plus une boule de la même couleur (Si on a tiré une rouge, alors avant le deuxième tirage, l'urne contient 3 rouges et 1 verte)

Déterminer  $P(\text{les 3 boules sont vertes})$

$$P(\text{les 3 boules sont vertes}) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

$$= P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) \times P_{V_1 V_2}(V_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$