Exercice 1

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{U} = (u, v, v)$ une base de E
Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(u),\ f(v),\ f(w)\big)$

Soit $f : E \overset{a.l.}{\to} F$ et $\mathcal{U} = (u,\ v,\ w)$ une base de E

Montrons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{U}))$ par double inclusion

$\subset$ Soit $k \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow$ $\exists j \in E,\ v = f(u)$ avec $(u,\ v,\ w)$ une base de E

$\Rightarrow$ $\exists (a,\ b,\ c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $j = a.u + b.v + c.w$

$\Rightarrow$ $k = f(j) = f(a.u + b.v + c.w)$

$= a.f(u) + b.f(v) + c.f(w)$ car f est linéaire

$\Rightarrow$ $k \in \operatorname{Vect}(f(u),\ f(v),\ f(w))$

Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(f(u),\ f(v),\ f(w))$

$\supset$ Soit $k \in \operatorname{Vect}\big(f(u),\ f(v),\ f(w)\big)$

$\Rightarrow$ $\exists (a,\ b,\ c) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$k = a.f(u) + b.f(v) + c.f(w)$

$= f(a.u + b.v + c.w)$

$k = f(j)$ avec $j = a.u + b.v + c.w \in E$

$\Rightarrow$ $k \in \operatorname{Im} f$

Donc $\operatorname{Vect}(f(u),\ f(v),\ f(w)) \subset \operatorname{Im} f$

On a donc bien l'égalité des deux ensembles

Remarque Pour montrer la deuxième partie $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{U})) \subset \operatorname{Im} f$ on pouvait aussi faire ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} f(u) \in \operatorname{Im} f \\ f(v) \in \operatorname{Im} f \\ f(w) \in \operatorname{Im} f \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \underline{\operatorname{Im} f \text{ est un sev de } F}$$

Donc $\operatorname{Vect}(f(u),\ f(v),\ f(w)) \subset \operatorname{Im} f$

Ce qui est plus rapide, à condition de ne pas oublier de d'écrire que $\operatorname{Im} f$ est un sev de F

Exercice 2

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$
et une famille $\mathcal{V} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ telle que
$v_1 = u_1 + u_2 \quad v_2 = u_1 - u_3 \quad v_3 = u_2 - u_3$

a) Montrer que $\mathcal{V}$ est une base de E

- $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E donc $\dim E = 3$
- Montrons que $\mathcal{V}$ est libre

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 = \vec{0}$

$$\iff a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} a & +b & & = 0 \\ a & & +c & = 0 \\ & -b & -c & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrl} a & & & = 0 \\ & -b & +c & = 0 \\ & -b & -c & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrl} a & & & = 0 \\ & -b & +c & = 0 \\ & & -2c & = 0 \end{array}\right.$$

Système triangulaire de pivots non nuls. Donc

$(a, b, c) = (0, 0, 0)$

- Donc $\mathcal{V}$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un e.v. de dimension 3

Donc $\mathcal{V}$ est une base de e

b) Quelle matrice de passage s'obtient sans calcul ?
On la note alors P. Donner sa valeur.

La matrice de passage de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ s'obtient sans calcul.

$$\text{On a} \quad P = P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} , \ \mathcal{C}$$

c) Calculer l'inverse de cette matrice P et vérifier le résultat obtenu
Si la matrice inverse est fausse, on pourra quand même continuer l'exercice en utilisant le résultat trouvé)

$$P = I.P$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.P$$

$$\iff \begin{array}{l} 2L_1 + L_3 \\ 2L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.P$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/(-2) \\ L_3/(-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.P$$

Donc P est inversible et $\quad P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie :

$$P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 & 1-1 \\ -1+1 & 1-1 & 1+1 \end{pmatrix}$$

$= I \quad$ Ça marche !

d) Soit k un vecteur de E. Donner la définition de :

« k a pour coordonnées $(5, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{U}$ »

Calculer alors à l'aide de P ou P^{-1} les coordonnées de k dans la base $\mathcal{V}$

« k a pour coordonnées $(5, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{U}$ »

$\iff \quad k = 5u_1 + 2u_2 + 3u_3$

On a $\quad X_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}} X_{\mathcal{U}}$

Or $\quad P = P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = P_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}}$

$$\Rightarrow \quad X_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}} X_{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc k a pour coordonnées $(5, 0, -3)$ dans la base $\mathcal{V}$

e) Soit j un vecteur de coordonnées $\quad (a,\ b,\ c) \quad$ dans la base $\mathcal{V}$

Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ à l'aide de P ou P^{-1}

On a dememe

$$X_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} X_{\mathcal{V}} = P X_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ -b-c \end{pmatrix}$$ Donc j a pour coordonnées $\quad (a+b,\ a+c,\ -b-c) \quad$ dans la base $\mathcal{V}$

f) Sans aucun calcul, déterminer les coordonner de u_2 dans la base $\mathcal{V}$. (Expliquer succinctement)

$$\text{On a } P^{-1} = P_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2, \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} & \mathcal{V} \end{array}$$

En utilisant la deuxième colonne de P^{-1}, on trouve que

u_2 a pour coordonnées $\quad (1/2,\ -1/2,\ 1/2) \quad$ dans la base $\mathcal{V}$

Exercice 3

Soient $f_0,\ f_1, f_2$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1 = \cos x, \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

Montrer que $(f_1,\ f_2, f_3)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3 = 0$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a.f_1(x) + b.f_2(x) + c.f_3(x) = 0$

$\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a.\cos x + b.\cos 2x + c.\sin x = 0$

En particulier

pour $x = 0,\ a.\cos 0 + b.\cos 0 + c.\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$

pour $x = \pi/2,\ a.\cos \pi/2 + b.\cos \pi + c.\sin \pi/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -b + c = 0$

pour $x = -\pi/2,\ a.\cos(-\pi/2) + b.\cos(-\pi) + c.\sin(-\pi/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -b - c = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a & +b & & = 0 \\ & -b & +c & = 0 \\ & -b & -c & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \begin{cases} a & +b & & = 0 \\ & -b & +c & = 0 \\ & & -2c & = 0 \end{cases}$$

Système triangulaire homogène de pivots non nuls

Donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ est l'unique solution

Donc $(f_1,\ f_2, f_3)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$

Remarque : Pour $x = \pi/4$, $a.\cos(\pi/4) + b.\cos(\pi/2) + c.\sin(\pi/4) = 0$

$\Rightarrow \quad a\frac{\sqrt{2}}{2} + c\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + c = 0$

Mais cette équation est redondante avec les deux premières (C'est-à-dire qu'on peut l'obtenir à partir des deux premières). Donc pas de chance ! Dans ce cas il faut en trouver une autre.

Exercice 4

1) Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$$

$P(X) = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 1$

Racine évidente : -1 On factorise par $Y + 1$

$P(X) = (Y + 1)(Y^2 + Y + 1)$

$y^2 + y + 1 = 0 \qquad \Delta = -3 = (\mathbf{i}\sqrt{3})^2$

$y_1 = \dfrac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}.2\pi/3} \quad y_2 = \overline{y_1} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2\pi/3}$

$$\begin{aligned} Y^2 + Y + 1 &= (Y - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.2\pi/3})((Y - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2\pi/3}) \\ &= \left(X^2 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.2\pi/3}\right)\left(X^2 - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2\pi/3}\right) \\ &= \left(X^2 - (\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})^2\right)\left(X^2 - (\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})^2\right) \\ &= (X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}) \end{aligned}$$

(Autre écriture possible :

$Y^2 + Y + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3}\right)\left(X - (-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})\right)\left(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}\right)\left(X - (-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})\right)$

avec $-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}.\pi/3}$

et en prenant le conjugué : $-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3} = \overline{-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3}} = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}.\pi/3}$

D'où $Y^2 + Y + 1 = (X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{2\mathbf{i}.\pi/3}))$

D'autre part $X^2 + 1 = (X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i})$

Dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned} P &= (X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i})(X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}) \\ &= (X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i})(X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$(X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i}) = X^2 + 1$

$(X - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}) = X^2 - 2.\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3}).X + 1 = X^2 - X + 1$

$(X + \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3})(X + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}) = X^2 + 2.\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3}).X + 1 = X^2 + X + 1$

Donc $P = (X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

Remarque :

$Y^2 + Y + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

Mais quand on remplace Y par X^2

$X^4 + X^2 + 1$ N'EST PAS irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$A_n = X^{n+1} + X^n + X + 1 \quad \text{par} \quad B = (X - 1)^2$$

D'après la divsion euclidienne, on a $A = BQ + R$ avec $\mathrm{d}^\circ R < \deg B = 2 \quad \Rightarrow \quad R = aX + b$ avec $a, b) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \quad A(1) = R(1) = a + b \quad \Rightarrow \quad a + b = 4$

et $A'(X) = (X - 1)^2.Q'(X) + 2(X - 1).Q(X) + R'(X)$

$\Rightarrow \quad A'(1) = a$

$A'(X) = (n + 1)X^n + nX^{n-1} + +1 \quad \Rightarrow \quad A'(1) = 2n + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2n + 2$

Or $a + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -2n + 2$

D'où $\boxed{R = (2n + 2)X + (-2n + 2)}$

Vérif. : $C = A - R = X^{n+1} + X^n - (2n + 1)X + (2n - 1)$

$C(1) = 1 + 1 - (2n + 1) + (2n - 1) = 0$

$C'(X) = (n + 1)X^n + nX^{n-1} - (2n + 1)$

$\Rightarrow \quad C'(1) = (n + 1) + n - (2n + 1) = 0$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P(X) \mapsto P(X - 1) + P'(2X)$

a) Montrer que f est une application linéaire

Soiient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P, Q \in (\mathbb{R}_3[X])^2$

$f(aP + bQ) = (aP + bQ)(X - 1) + (aP + bQ)'(2X)$

$$= a.P(X-1)+b.Q(X-1)+a.P'(2X)+b.Q'(2X)$$
$$= a.\big(P(X-1)+P'(2X)\big)+b\big(Q(X-1)+Q'(2X)\big)$$
$$= a.f(P)+b.f(Q)$$

Donc f est linéaire

b) Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}_3 = (X^3,\ X^2,\ X,\ 1)$

- $P(X) = X^3 \quad P(X-1) = (X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

  $P'(X) = 3X^2,\ P'(2X) = 12X^2$

  $f(X^3) = X^3 + 9X^2 + 3X - 1$
- $P(X) = X^2 \quad P(X-1) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

  $P'(X) = 2X,\ P'(2X) = 4X$

  $f(X^2) = X^2 + 2X + 1$
- $P(X) = X \quad P(X-1) = X - 1$

  $P'(X) = 1,\ P'(2X) = 1$

  $f(X) = X$
- $P(X) = 1,\ P(X-1) = 1 \quad P'(X) = 0,\ P'(2X) = 0$

  $f(1) = 1$

Donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soient $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad$ une application linéaire

et $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad$ sa matrice canoniquement associée.

1. Déterminer n et p
   Peut-on <u>en déduire</u> sans calcul si f peut être injective, surjective, bijective ?

   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ donc $n + 3,\ p = 4$

   $n < p$ donc f ne peut pas être surjective, ni bijective

   Par contre elle peut être injective (ou pas).

2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} f$

   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $u \in \mathrm{Ker} f \iff f(u) = 0 \iff MX = 0 \quad$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   $$\iff \begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ 2x + 3y + 13z = 0 \\ 0.x + 0.y + 0.z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_4 \\ L_2 - 2L_4 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} y + 9z = 0 \\ y + 11z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_4 \\ L_2 - 2L_4 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} y + 9z = 0 \\ y + 11z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} -2z = 0 \\ y + 11z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

   Système triangulaire homogène de pivots $1, 1, -2$ non nuls.

   Donc $\quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \quad$ est la seul solution

   Conclusion $\quad \mathrm{Ker} f\{0\} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Ker} f = 0$

3. En déduire par le théorème du rang la dimension de $\mathrm{Im} f$

   D'après le théorème du rang, $\quad \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3$

   $\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Im} f = 3$

4. f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier !

   On a déjà vu que f n'est ni surjective ni bijective

   Et $\quad \mathrm{Ker} f = \{0\} \quad \Rightarrow \quad f$ est injective

5. Déterminer alors une base de $\mathrm{Im} f$

   (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

   $\Rightarrow \quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ avec

   $v_1 = f(e_1) = (1, 2, 0, 1),$

   $v_2 = f(e_2) = (2, 3, 0, 1),$

   $v_3 = f(e_3) = (8, 13, 0, -1)$

(v_1, v_2, v_3) est une famille de 3 vecteurs qui engendre $\mathrm{Im} f$ avec $\dim \mathrm{Im} f = 3$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathrm{Im} f$

Remarque : Grâce aux considérations sur les dimension, il était inutile de faire aucun calcul.

Musée des horreurs

$\boxed{\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \quad \text{système échelonné donc } (a,b,c)=(0,0,0)}$

Un système échelonné ne donne pas de solution unique. Donc un système échelonné homogène N'IMPLIQUE PAS que $(0,0,0)$ est la seule solution.

$\boxed{\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \quad \text{système triangulaire échelonné donc } (a,b,c)=(0,0,0)}$

Par contre, un système *triangulaire* donne bien une solution unique... Sauf que ce système N'EST PAS triangulaire.

$\boxed{z^2 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}.2\pi/3} \qquad \text{Racines : } z_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/3} \quad \Rightarrow \quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\pi/3}}$

On ne peut pas prendre le conjugué de z_1 comme deuxième racine car le polynôme $X^2 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.2\pi/3}$) **N'EST PAS** dans $\mathbb{R}[X]$

$\overline{z_1}$ n'est pas racine du polynôme, mais racine du **polynôme conjugué** :

$z_2 = \overline{z_1}$ est racine de l'équation conjuguée $z^2 = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2\pi/3}$)

$\boxed{\begin{array}{l} P(X) = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 = Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 1 \\ \text{On pose} \quad Y = X^2 \qquad P(Y) = Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 1 \end{array}}$

Bah non ! Ce ne sont pas les mêmes polynômes.

Si $P(Y) = Y^6 + 2Y^4 + 2Y^2 + 1$

Donc $P(X) = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$

On doit écrire dans ce cas : $Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 1 = \underline{Q(Y)}$

$\boxed{\text{Pour} \quad X = 1}$

X est un **polynôme**, donc l'écriture $X = 1$ a un sens (c'est déjà pas mal) mais est **FAUX**. (Ce qui est gênant).

Il ne faux donc pas confondre par exemple les deux ecritures suivantes :

- $X^2 = X$

  qui est faux, car ce sont sont deux polynômes différents
- $x^2 = x$ (avec $x \in \mathbb{R}$)

  Dans ce cas, l'égalité est vraie si et seulement si $x \in \{0, 1\}$