Professeur : SERVAIN	**Discipline : Maths**
Classe : PCSI	**Durée de l'épreuve : 2 h 00**
Durée minimale : 2 h 00	**Matériel autorisé : Rien**

- **Marge droite de 2 cm**
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

On commencera chaque exercice sur une page différente

Exercice 1 Soient $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{U} = (u, v, v)$ une base de E

Démontrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\big(f(u),\ f(v),\ f(w)\big)$

Exercice 2 Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et une famille $\mathcal{V} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ telle que

$$v_1 = u_1 + u_2 \quad v_2 = u_1 - u_3 \quad v_3 = u_2 - u_3$$

a) Montrer que $\mathcal{V}$ est une base de E

b) Quelle matrice de passage s'obtient sans calcul ?

On la note alors P. Donner sa valeur.

c) Calculer l'inverse de cette matrice P et vérifier le résultat obtenu
Si la matrice inverse est fausse, on pourra quand même continuer l'exercice en utilisant le résultat trouvé)

d) Soit k un vecteur de E. Donner la définition de :

« k a pour coordonnées $(5, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{U}$ »

Calculer alors à l'aide de P ou P^{-1} les coordonnées de k dans la base $\mathcal{V}$

e) Soit j un vecteur de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans la base $\mathcal{V}$

Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ à l'aide de P ou P^{-1}

f) Sans aucun calcul, déterminer les coordonner de u_2 dans la base $\mathcal{V}$. (Expliquer succinctement)

Exercice 3 Soient $f_0,\ f_1, f_2$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1 = \cos x, \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

Montrer que $(f_1,\ f_2, f_3)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$

Exercice 4

1) Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$$

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$A_n = X^{n+1} + X^n + X + 1 \quad \text{par} \quad B = (X-1)^2$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P(X) \mapsto P(X-1) + P'(2X)$

a) Montrer que f est une application linéaire

b) Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}_3 = (X^3,\ X^2,\ X,\ 1)$

Exercice 6 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire

et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sa matrice canoniquement associée.

1. Déterminer n et p
   Peut-on en déduire sans calcul si f peut être injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} f$
3. En déduire par le théorème du rang la dimension de $\mathrm{Im} f$
4. f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier !
5. Déterminer alors une base de $\mathrm{Im} f$