

1 Univers, événements

Définition 1

- On appelle **univers** l'ensemble de résultats possibles et on le note Ω .
- Un **événement** est un sous ensemble de Ω .
- Les singletons de Ω (parties à un seul élément) sont appelés des **événements élémentaires**

a) Lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) On lance 5 fois un dé

Un événement élémentaire est par exemple : $\omega = (1, 1, 2, 4, 6)$

Les événements élémentaires sont donc les 5-liste parmi $[[1, 6]]$

$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ avec $r_k \in [[1, 6]]$

$\Omega = [[1, 6]]^5$ $|\Omega| = 6^5$

c) On lance n fois un dé : $\Omega = [[1, 6]]^n$

d) Urne 4 boules rouges, 5 noires, 6 vertes. On tire une boule

$\Omega = \{R, N, V\}$ ou $\Omega = \{B_1, \dots, B_{15}\}$

(L'avantage du dernier est d'avoir l'équiprobabilité)

Définition 2 : Incompatibilité

- A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire qu'ils ne peuvent avoir lieu en même temps)
- Les événements (A_1, A_2, \dots, A_n) sont deux à deux incompatibles ssi $\forall i \neq j, A_i$ et A_j sont incompatibles

Définition 3 : Système complet d'événements

- $(A_i)_{i \in [[1, n]]}$ forme un système complet d'événements si et seulement si c'est une partition de Ω c'est-à-dire
- Les A_i sont deux à deux incompatibles ($\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$)
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

ou encore

Définition 4

- $(A_i)_{i \in [[1, n]]}$ forme un système complet d'événements si et seulement si tout élément de Ω appartient à un des ensembles A_i et un seul

Exemple : $\Omega = [[0; 10]]$ $A = \{1, 4, 7, 10\}$ $B = \{2, 5, 8\}$ $C = \{3, 6, 9\}$

(A, B, C) est un système complet d'événements.

2 Probabilité

Définition 5

Une probabilité est une application $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout événement A associe un nombre réel noté $p(A)$ telle que :

- Pour tout événement A , $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\Omega) = 1$
- Pour tous événements A et B incompatibles $P(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété 1

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles, alors

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$
 en d'autres termes : $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$
- Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$

Exemple : Soit un dé pipé à 6 faces tel que $p(i) = a.i$ pour $i \in [[1; 6]]$

a) Déterminer a

b) Déterminer $p(A)$ avec $A = \ll \text{le résultat obtenu est pair} \gg$

a) On doit avoir $p(\Omega) = 1$

$$\iff p(\{1\}) + p(\{2\}) + \dots + p(\{6\}) = 1$$

$$\iff a.1 + a.2 + \dots + a.6 = 1$$

$$\iff a.(1 + 2 + \dots + 6) = 1$$

$$\iff a \frac{6 \times 7}{2} = 1$$

$$\iff a = \frac{1}{21}$$

b) $p(A) = p(\{2, 4, 6\}) = 2a + 4a + 6a = 12a = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Propriété 2 : Formules utiles

$$\begin{aligned} & \bullet p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \bar{B}) \\ & \qquad \qquad \qquad = p(B) - p(\bar{A} \cap B) \\ & \bullet p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \\ & \qquad \qquad \qquad = p(A \cup B) - p(B) \end{aligned}$$

3 Probabilité conditionnelle**Définition 6**

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple : On reprend le dé précédent

- Calculer la probabilité d'avoir tiré le n°1 sachant que le résultat obtenu est impair
- Calculer la probabilité d'avoir un numéro pair sachant que le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4
- Calculer la probabilité d'avoir que le résultat qu'il est obtenu qu'il est supérieur ou égal à 4 sachant le numéro qu'il est pair

a) Le résultat est impair = \bar{A}

$$p_{\bar{A}}(\{1\}) = \frac{p(\bar{A} \cap \{1\})}{p(\bar{A})} = \frac{p(\{1\})}{1 - p(A)} = \frac{1/21}{1 - (4/7)} = \frac{1}{9}$$

b) Posons $B = \ll \text{le résultat est supérieur ou égal à 4} \gg = \{4, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} P(B) &= 4a + 5a + 6a = 15/21 \\ P_B(A) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\{4, 6\})}{p(B)} = \frac{4/21 + 6/21}{15/21} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$c) P_A(B) = P(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{10/21}{4/7} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Propriété 3 : Formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} & \bullet P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \\ & \bullet P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C) \\ & \bullet p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ & \qquad \qquad \qquad = p(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \end{aligned}$$

Exemple : Urne avec 3 noires et 2 rouges

On tire successivement 3 boules. Après chaque tirage, on remet la boule tirée plus une autre de la même couleur

Calculer la probabilité d'avoir tiré 3 boules rouges.

$$\begin{aligned} p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= p(R_1 R_2 R_3) \\ &= p(R_1) P_{R_1}(R_2) P_{R_1 \cap R_2}(R_3) \end{aligned}$$

$$\bullet p(R_1) = \frac{2}{5}$$

- $P_{R_1}(R_2) = ?$ < passé, présent, futur >
passé : on a R_1 on a tiré une boule rouge au premier tirage
présent : l'urne contient 3R et 3N
futur : on veut tirer une boule rouge (R_2)
Donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- $P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = ???$
passé : on a $R_1 R_2$ on a tiré une boule rouge au premier tirage et au deuxième
présent : l'urne contient 4R et 3N
futur : on veut tirer une boule rouge (R_3)
 $P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{4}{7}$

$$\bullet \text{D'où } p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$

4 Formule des probabilités totales

Même exemple : Que vaut $P(R_2)$?

R_2 : deuxième tirage \rightarrow dépend du premier tirage

Premier tirage : N_1 ou R_1 $\{N_1, R_1\}$ Système complet d'événements

Remarque : SCE ou pas SCE ?

- $\{N_1, N_2\}$ SCE????
 N_1, N_2 pas incompatibles.
 $N_1 \cup N_2 \neq \Omega$ car par exemple $R_1 R_2$ n'est pas dans $N_1 \cap N_2$
- (R_2, N_2) : SCE????
 OUI $N_2 \cap R_2 = \emptyset$ et $R_2 \cup N_2 = \Omega$
- $\{R_1, N_1, R_2, N_2\}$ pas SCE car par exemple R_1, R_2 pas incompatibles
- $\{R_1 R_2, R_1 N_2, N_1 R_2, N_1 N_2\}$ SCE qui décrit les deux premiers tirages.
- $\{R_1 R_2, R_1 N_2, N_1\}$ SCE (qui ne décrit pas grand chose.)

Retour à notre problème : $P(R_2) = ????$

$\{N_1, R_1\}$ Système complet d'événements

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 \cap \Omega = R_2 \cap (N_1 \cup R_1) \\ &= (R_2 \cap N_1) \cup (R_2 \cap R_1) \\ &= (N_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2) \\ &= (N_1 R_2) \cup (R_1 R_2) \end{aligned}$$

L'union est disjointe car N_1 et R_1 incompatibles

$$p(R_2) = p(N_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2)$$

Formule des probabilités totales sous forme conjointe

$$p(R_2) = p(N_1) \cdot P_{N_1}(R_2) + p(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2)$$

Formule des probabilités totales sous forme conditionnelle

$$\begin{aligned} P(N_1) &= \frac{3}{5} \\ P_{N_1}(R_2) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (4N \text{ et } 2R) \\ P(R_1) &= 2/5 \quad P_{R_1}(R_2) = 1/2 \\ P(R_2) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Propriété 4 : FPT avec (A, \bar{A})

$$\begin{aligned} p(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Propriété 5 : FPT (Forme conjointe)

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une système complet d'événements et B un événement. On a alors la formule des probabilités totales (FPT) :

$$\begin{aligned} p(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^n p(A_k \cap B) \end{aligned}$$

Propriété 6 : FPT (Forme conditionnelle)

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une système complet d'événements et B un événement. On a alors la formule des probabilités totales (FPT) :

$$\begin{aligned} p(B) &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Remarque : si $P(A_k) = 0$ on pose $P_{A_k}(B) = \text{n'importe quoi}$.

Exemple

Une première urne U contient 6 boules : 3 avec le n°1, 2 avec le n°2 et 1 avec le n°3
 On a une série de 3 urnes numérotées de 1 à 3. L'urne V_i contient 1 boule blanche et i boules rouges.
 On tire une boule dans l'urne U . Si le numéro tiré est i , alors on tire une boule dans l'urne i .
 Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

Deux étapes :

- 1ere étape : on tire dans U
- 2ème étape : en fonction du premier tirage, on tire dans une des urnes V_i

$V_1 = \{1R, 1B\}$ Donc la proba d'avoir une boule rouge dans V_1 est $1/2$

Attention : ne surtout pas écrire $P(R) = \frac{1}{2}$ (HORREUR)

Il faut bien montrer que cela dépend de l'urne dans laquelle on tire :

$$P_{V_1}(R) = \frac{1}{2} \quad P_{V_2}(R) = \frac{2}{3} \quad P_{V_3}(R) = \frac{3}{4}$$

>>> La probabilité d'avoir une boule rouge dépend de l'urne dans laquelle est effectuée le tirage. Donc le SCE doit être constitué des urnes

Notons V_i l'événement : « le deuxième tirage a lieu dans l'urne V_i »

(V_1, V_2, V_3) forme un **système complet d'événements**

Donc d'après la formule des probas totales :

$$p(R) = p(V_1)P_{V_1}(R) + p(V_2)P_{V_2}(R) + p(V_3)P_{V_3}(R)$$

$$P_{V_1}(R) = \frac{1}{2} \quad \text{car } V_1 \text{ contient 1 Blanche et 1 Rouge}$$

$$P_{V_2}(R) = \frac{2}{3} \quad \text{car } V_2 \text{ contient 1 Blanche et 2 Rouges}$$

$$P_{V_3}(R) = \frac{3}{4} \quad \text{car } V_3 \text{ contient 1 Blanche et 3 Rouges}$$

$$\begin{aligned} p(R) &= p(V_1)P_{V_1}(R) + p(V_2)P_{V_2}(R) + p(V_3)P_{V_3}(R) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{43}{72} \end{aligned}$$

Propriété 7 : Formule de Bayes

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) un Système complet d'événements et B un événement. On a alors la formule de Bayes :

$$p(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

5 Un cas très particulier : l'équiprobabilité

Définition 7

Soit Ω un univers fini

On dit qu'il y a **équiprobabilité** si et seulement si tous les événements élémentaires (c'est-à-dire les singletons) ont la même probabilité

Exemple 1 : On lance un dé équilibré

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = \dots = p(\{6\}) = 1/6$$

Tous les singletons ont la même probabilité. Il y a donc bien équiprobabilité

Propriété 8

Soit Ω un univers fini et A un événement de Ω

S'il y a équiprobabilité, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

Exemple 2 : Une urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 vertes, 6 noires
On tire simultanément 3 boules

- Calculer la probabilité d'avoir exactement une rouge
- Probabilité d'avoir au moins une verte
- On a obtenu exactement une rouge. Quelle est alors la probabilité d'avoir au moins une verte

Remarque Dans ce genre d'exercice, il est essentiel de d'abord définir précisément le cadre dans lequel on va travailler, et de s'y tenir dans la suite

- quelles sont les résultats possibles ?
- y a-t-il équiprobabilité ?
- Card (Ω) ?

Solution

On tire 3 boules simultanément. Donc il n'y a pas de répétitions possibles (on ne peut avoir deux fois la même boule) et l'ordre ne compte pas.

Pas de répétition, pas d'ordre : les résultats possibles sont des combinaisons de 3 boules parmi 15. Donc

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \times 7 \times 13$$

Tous les résultats ont la même probabilité d'apparaître : il y a équiprobabilité. On peut donc travailler par dénombrement.

a) $A =$ « avoir exactement une rouge »

Il faut avoir une rouge parmi 4 : 4 choix

et 2 non rouges parmi 11 : $\binom{11}{2} = 55$

$$\text{Donc } \text{Card}(A) = 4 \times 55 \text{ et } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4 \times 55}{5 \times 7 \times 13} = \frac{4 \times 11}{7 \times 13}$$

b) $B =$ « avoir au moins une verte »

$\bar{B} =$ « n'avoir aucune verte »

On choisit 3 non vertes parmi 10

$$\text{Card}(\bar{B}) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 3 \times 8 = 120$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{\text{Card}(\bar{B})}{\text{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{5 \times 3 \times 8}{5 \times 7 \times 13} = 1 - \frac{3 \times 8}{7 \times 13}$$

c) On a obtenu exactement une rouge. Quelle est alors la probabilité d'avoir au moins une verte ?

Attention c'est une proba conditionnelle : on **sait** qu'on a obtenu une rouge.

$$\text{donc } P_A(B) \quad p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Considérons $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ union disjointe

$$\Rightarrow p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \overline{B})$$

Donc

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$= \frac{p(A) - p(A \cap \overline{B})}{p(A)}$$

$$= 1 - \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(A)}$$

$A \cap \overline{B}$ = « exactement une rouge et pas de verte »
= « 1 rouge et 2 noires »

On choisit une rouge parmi 4 : 4 choix

et 2 noires parmi 6 : $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 3 \times 5$

Etc.

5.1 Probabilités conditionnelles

Propriété 9

|| On ne tripatouille jamais la condition

Par contre, si la condition reste la même, on peut utiliser les propriétés élémentaires sur les probabilités :

$$\text{Ainsi } P(B) = 1 - P(\overline{B}) \quad p_A(B) = 1 - P_A(\overline{B})$$

$$p(B \cup C) = p(B) + P(C) - p(B \cap C) \quad p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C) - p_A(B \cap C)$$

Propriété 10

- $p_A(B) = 1 - P_A(\overline{B})$
- $p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C) - p_A(B \cap C)$
- Si B et C sont disjoints $p_A(B \cup C) = p_A(B) + P_A(C)$

Propriété 11

- || Si A est un événement de proba non nulle.
- || Alors P_A définit une loi de probabilité

Exemple :

Dans une urne U on tire successivement deux boules sans remise

$U = \{3R, 4V, 5N, 6J\} = 18$ boules

$P(N_2)$? $P_{N_1}(N_2)$? $P_{V_1}(N_2) = ?$ $P_{N_1 \cup V_1}(N_2) = ?$

- Cadre :

Tirage successifs sans remise
ordre, pas répétition

Ω = ensemble des arrangements de 2 boules parmi 18

$$\text{Card}(\Omega) = A_{18}^2 = 18 \times 17$$

On a équiprobabilité des différents tirages

- $p(N_2) = \frac{\text{Card}(N_2)}{\text{Card}(\Omega)}$

N_2 arrangements avec deuxième boule noire

Je choisis la deuxième boule noire : 5 choix

puis je choisis la première boule : 17 choix

$$\text{Card}(N_2) = 5 \times 17$$

$$\Rightarrow p(N_2) = \frac{5 \times 17}{18 \times 17} = \frac{5}{18}$$

- $P_{N_1}(N_2) = ??$

→ Passé : on a tiré une boule noire au premier tirage

→ Présent : on 17 boules dont 4 noires

→ futur : on veut tirer une nouvelle boule noire

$$P_{N_1}(N_2) = \frac{4}{17}$$

Autre méthode :

$$P_{N_1}(N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)} = \frac{\frac{\text{Card}(N_1 \cap N_2)}{\text{Card}(\Omega)}}{\frac{\text{Card}(N_1)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{\text{Card}(N_1 \cap N_2)}{\text{Card}(N_1)}$$

$$= \frac{5 \times 4}{5 \times 17} = \frac{4}{17}$$

Attention : dans $\text{Card}(N_1)$, on prend une noire : 5 choix. Ne pas oublier de prendre la deuxième boule qui est quelconque : 17 choix.

En effet, on a défini l'univers comme les arrangements de deux boules. Et on ne change pas de monture au milieu du gué

- $P_{V_1}(N_2) =$

On a tiré une verte

Présent : on a 17 boules dont 5 noires

On veut une noire

$$P_{V_1}(N_2) = \frac{5}{17}$$

$$\bullet P_{N_1 \cup V_1}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap (N_1 \cup V_1))}{P(N_1 \cup V_1)}$$

$$\rightarrow P(N_1 \cup V_1) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(N_2 \cap (N_1 \cup V_1)) &= P((N_2 \cap N_1) \cup (N_2 \cap V_1)) \\ &= P(N_2 \cap N_1) + P(N_2 \cap V_1) \\ &= P(N_1) \cdot P_{N_1}(N_2) + P(V_1) \cdot P_{V_1}(N_2) \\ &= \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{40}{17 \times 18} = \frac{20}{17 \times 9} \end{aligned}$$

$$\rightarrow P_{N_1 \cup V_1}(N_2) = \frac{\frac{20}{17 \times 9}}{\frac{1}{2}} = \frac{40}{17 \times 9} = \frac{40}{153}$$

6 Indépendance en probabilité

Idée : A et B indépendants si et seulement si la réalisation de l'un des événement n'influence pas la proba d'avoir l'autre

Donc $P(A|B) = P(A)$

$$\iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{C'est la défintion !}$$

Exemple trivial (=à la noix)

$$P(6 \text{ avec un dé puis Face avec pièce}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \quad \text{Waouhhh}$$

Définition 8 : Evénements indépendants

Soient A et B deux événements.

A et B sont indépendants en probabilité si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Propriété 12

Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} ; \bar{A} et B ; \bar{A} et \bar{B} le sont également.

Démonstration

Supposons A et B indépendants

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$\text{Donc } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$$

Donc A et \bar{B} sont indépendants.

On procède de même pour les autres couples.

fin demo

Propriété 13

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont indépendants

$$\iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff P(A) = P(A|\bar{B})$$

$$\iff P(B|A) = P(B)$$

Démonstration

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Donc

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\iff P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\iff P(A|B) = P(A) \quad \text{car } P(B) \neq 0$$

fin demo

Définition 9 : Événements deux à deux indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **deux à deux** indépendants si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants.}$$

Définition 10 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement** indépendants si :

Pour toute sous-famille $J \subset I$ d'indices de I ,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

(A_1, A_2, A_3) sont mutuellement indépendants

si et seulement si

- $P(A_1) = P(A_1)$ trivial etc.
- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$ idem avec (A_2, A_3) et avec (A_1, A_3)
 \Rightarrow indépendance deux à deux

- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$

Cela signifie que quels que soient un nombre fini d'événements pris dans la famille, ils vérifient la propriété d'indépendance.

Propriété 14 : indépendances

Si une famille d'événements sont **mutuellement** indépendants
 Alors ils sont aussi **deux à deux** indépendants

Attention : la réciproque est fautive

Exemple

On lance deux pièces équilibrées.

$P_1 \iff$ la première donne pile

$P_2 \iff$ la deuxième donne pile

$M \iff$ les deux pièces donnent le même résultat

Les 3 événements sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

- $p(P_1) = p(P_2) = \frac{1}{2}$ $p(M) = p(P_1 P_2) + p(F_1 F_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ (deux tirages indépendants)
 $p(P_1).p(P_2).p(M) = \frac{1}{8}$ $p(P_1 \cap P_2 \cap M) = p(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$ Pas mutuellement indépendants
- $p(P_1 \cap M) = p(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} = p(P_1).p(M)$
 etc.
 On vérifie deux à deux indépendants

Exemple :

On lance n fois une pièce déséquilibrée telle que $p(F) = p \in]0, 1[$
 Proba d'avoir obtenu n fois Face?

$$\begin{aligned}
 P(n \text{ fois Faces}) &= p(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \\
 &= p(F_1) \times p(F_2) \times \dots \times p(F_n) \\
 &= p^n \quad \text{car les lancers sont mutuellement indépendants}
 \end{aligned}$$

Exemple 3: Si (A, B, C) sont mutuellement indépendants
 Qu'en est-il de (\bar{A}, B, C) ? de (\bar{A}, B, \bar{C}) ?

- Trivialement (\bar{A}, B, C) sont 2 à 2 indépendants
- Calculons $p(\bar{A} \cap B \cap C)$

$$\begin{aligned}
 p(\bar{A} \cap B \cap C) &= p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C) \\
 &= p(B).p(C) - p(A).p(B).p(C) \\
 &= (1 - p(A)).p(B).p(C) \\
 &= p(\bar{A}).p(B).p(C)
 \end{aligned}$$

- Conclusion : (\bar{A}, B, C) sont également mutuellement indépendants

En utilisant cette propriété et en l'appliquant ensuite à C on obtient que (\bar{A}, B, \bar{C}) sont également mutuellement indépendants

On généralise ainsi :

Propriété 15 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements **mutuellement** indépendants et E_i
 une famille d'événements tels que $E_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$
 Alors $(E_i)_{i \in I}$ est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants

Propriété 16 : Événements mutuellement indépendants

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements **mutuellement** indépendants
 alors toute sous-famille est également formée d'événements mutuellement indépendants