

1 Définitions

1.1 Exemples

Exemple 1

Dans une urne contenant

- 3 boules numérotées 1
- 4 boules numérotées 2
- 5 boules numérotées 3

on tire simultanément deux boules au hasard sans remise et on note X la somme des numéros obtenus.

X est une variable aléatoire à valeurs entières. C'est une variable aléatoire entière finie.

ω un résultat de l'expérience

Ici paire de boules = combinaison de deux boules parmi 12 $|\Omega| = \binom{12}{2} = 6 \times 11 = 66$

$\omega \mapsto X(\omega)$ =somme des numéros

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

Domaine des **valeurs** de X ou bien le **support** de X : $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Connaître la loi de X c'est connaître

$P(X=2) = ?$ $P(X=3) =$ $P(X=4) =$

$$P(X=2) = P(\{1, 1\}) = \frac{\binom{3}{2}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{66}$$

$$P(X=3) = P(\{1, 2\}) = \frac{3 \times 4}{66} = \frac{12}{66}$$

$$P(X=4) = P(\{1, 3\}) + P(\{2, 2\}) = \frac{3 \times 5 + \binom{4}{2}}{66} = \frac{21}{66}$$

$$P(X=5) = P(\{2, 3\}) = \frac{4 \times 5}{66} = \frac{20}{66}$$

$$P(X=6) = P(\{3, 3\}) = \frac{\binom{5}{2}}{66} = \frac{10}{66}$$

| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | total |
|-------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P_X(k) = P(X=k)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |

Exemple 2

On tire au hasard un nombre X dans $[0 ; 1]$ grâce au générateur aléatoire de la calculatrice.

X est une variable aléatoire continue.

Exemple 3

On lance n fois une pièce et X est la proportion de « Face » obtenus. L'ensemble des valeurs de X est $\left\{0 ; \frac{1}{n} ; \frac{2}{n} ; \dots ; \frac{n-1}{n} ; 1\right\}$

X est une variable aléatoire discrète finie mais à valeurs non entières.

Exemple 4

On lance une pièce successivement. T est le rang du lancer donnant « Face » pour la première fois si Face apparaît une fois. Sinon $T = 0$. L'ensemble des valeurs possible est $\{0 ; +\infty\} [= \mathbb{N}$

On a une variable aléatoire discrète entière infinie

(En fait $P(T=0) = 0$ donc on garde souvent simplement $\{1, +\infty\}$)

Exemple 5

On lance trois fois de suite un dé équilibré.

Ω est l'ensemble des histoires possibles.

Donc ici $\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \dots, (6, 6, 6)\}$

C'est l'ensemble des triplets de nombres de $\{1; 6\}$

Posons X le plus grand nombre obtenu au cours de ces trois lancers.

Donc à toute histoire de Ω , va correspondre une valeur de X

Pour $(1, 2, 3)$ $X = 3$

pour $(2, 4, 2)$ $X = 4$

X est donc une application de Ω dans $X(\Omega) = \{1; 6\}$

Il ne faut donc pas confondre Ω et $X(\Omega)$

1.2 Définitions

Définition 1 : Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une application de Ω dans \mathbb{R}

L'ensemble des valeurs que peut prendre X est noté $X(\Omega)$

On l'appelle domaine des valeurs de X ou encore *support* de X

Définition 2 : Types de v.a.

- | X est une variable discrète finie si $X(\Omega)$ est fini
- | X est une variable discrète infinie si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$
- | X est une variable aléatoire entière si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$

Définition 3 : donner la loi

- | Donner la loi P_X d'une variable aléatoire discrète, c'est donner
 - $X(\Omega)$
 - La valeur de $P_X(k) = P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$

Remarque : $(X = k) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\} = X^{-1}(\{k\})$

D'où $P_X(k) = P(X^{-1}(\{k\}))$

Définition 4 : vérifier la loi

- | Vérifier qu'on a la loi d'une v.a., c'est montrer
 - $\forall k \in X(\Omega), P_X(k) \geq 0$
 - $\sum_{k \in X(\Omega)} P_X(k) = 1$

Exemple 1

On donne $X(\Omega) = [[0; 10]]$
 Pour $k \in [[1; 10]]$, $P(X = k) = k/100$
 Déterminer $P(X = 0)$

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{k=0}^{10} P(X = k) \\
 &= P(X = 0) + \sum_{k=1}^{10} P(X = k) \\
 &= P(X = 0) + \sum_{k=1}^{10} k/100 \\
 &= P(X = 0) + \frac{1}{10} \frac{10 \times 11}{2} = P(X = 0) + \frac{55}{100} \\
 \Rightarrow P(X = 0) &= \frac{45}{100}
 \end{aligned}$$

Exemple 2

On donne $X(\Omega) = [[0; n]]$
 Pour $k \in [[0; n]]$, $P(X = k) = a.(k + 1)$
 Déterminer a en fonction de n

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{k=0}^n P(X = k) = a. \sum_{k=0}^n (k + 1) = a. \sum_{k'=1}^{n+1} k' = a. \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \\
 \Rightarrow a &= \frac{2}{(n + 1)(n + 2)}
 \end{aligned}$$

Propriété 1 : Loi de $Y = f(X)$

- | Soit X une v.a. réelle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
- | On pose $Y = f(X)$
- | Alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$
- | et pour tout $y \in Y(\Omega)$ $P_Y(y) = P_X(f^{-1}(\{y\}))$

Remarque : $P_Y(y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} P_X(x)$

Exemple :

| | | | | | | |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | total |
| $P(X = k)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |

et $Y = |X|$
 $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
 $P_Y(0) = P(Y = 0) = P(|X| = 0) = P(X = 0) = 21/66$
 $P_Y(1) = P(Y = 1) = P(|X| = 1) = P(X = -1 \text{ Ou } X = 1) = 12/66 + 20/66 = 32/66$
 $P_Y(2) = P(Y = 2) = P(|X| = 2) = P(X = -2 \text{ Ou } X = 2) = 3/66 + 10/66 = 13/66$

| | | | | |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| k | 0 | 1 | 2 | total |
| $P_Y(k) = P(Y = k)$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{32}{66}$ | $\frac{13}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |

2 Espérance

Définition 5 : espérance

Soit une variable aléatoire X finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

On appelle espérance de X $E(X) = \sum_{k=0}^n x_k \cdot P(X = x_k)$

On écrit aussi $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P_X(x)$

Exemple : calculer l'espérance de X et Y de l'exemple précédent

Propriété 2 : Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \cdot P(X = x)$

Exemple

| k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | total |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = k)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |

$$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$Z = X^2$$

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$$

$$P(Z = 0) = P(X = 0) = 21/66$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = 32/66$$

$$P(Z = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = 13/66$$

| k | 0 | 1 | 4 | total |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(Z = k)$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{32}{66}$ | $\frac{13}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |

$$E(Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k \cdot P(Z = k)$$

$$= 0 \cdot P(Z = 0) + 1 \cdot P(Z = 1) + 4 \cdot P(Z = 4)$$

$$= 0 \cdot P(X^2 = 0) + 1 \cdot P(X^2 = 1) + 4 \cdot P(X^2 = 4)$$

$$= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot [P(X = 1) + P(X = -1)]$$

$$+ 4 \cdot [P(X = 2) + P(X = -2)]$$

$$= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 1 \cdot P(X = -1) + 4 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = -2)$$

$$= 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^1 \cdot P(X = 1) + (-1)^2 \cdot P(X = -1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + (-2)^2 \cdot P(X = -2)$$

$$E(Z) = E(X^2) = E(f(X))$$

$$= f(0) \cdot P(X = 0) + f(1) \cdot P(X = 1) + f(-1) \cdot P(X = -1) + f(2) \cdot P(X = 2) + f(-2) \cdot P(X = -2)$$

avec $f(x) = x^2$

Dans un cas concret

| k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | total |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = k)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |
| $k^2 \cdot P(X = k)$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{0}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{40}{66}$ | $\frac{84}{66}$ |

$$E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \cdot P(X = k) = \frac{84}{66}$$

Exemple

Soit la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = [[1; 10]] \text{ et } P(X = k) = k/55$$

Calculer $E(X)$; $E(X^2)$; $E(1/X)$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{10} k^2/55 = \frac{1}{55} \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \frac{1}{55} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{5.11} \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 7$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{10} k^2 \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{10} k^3/55 = \frac{1}{55} \sum_{k=1}^{10} k^3$$

$$= \frac{1}{55} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{5.11} \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = \frac{1}{5} 5^2 \cdot 11 = 55$$

$$E(1/X) = \sum_{k=1}^{10} 1/k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{10} (1/k) \cdot (k/55) = \sum_{k=1}^{10} 1/55 = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

Propriété 3 : Linéarité de l'espérance

$$\begin{cases} E(aX + b) = aE(X) + b \\ E(X + Y) = E(X) + E(Y) \\ E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y) \end{cases}$$

Exemple : En reprenant la variable précédente, calculer $E(X^2 + 2X)$

Définition 6 : V.A. positive

On dit qu'en variable aléatoire est **positive** ssi $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$

Propriété 4 : Positivité

- Si X est une variable aléatoire positive, alors $E(X) \geq 0$
- Si $(X \geq 0 \text{ et } E(X) = 0)$ alors $X = 0$

3 Variance

Définition 7 : Variance

On appelle variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[(X - m)^2] \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - m)^2 \cdot P(X = x) \quad \text{avec } m = E(X) \end{aligned}$$

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | total |
|-----------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = k) = P(X = x)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |
| $k \cdot P(X = k)$ | $\frac{-6}{66}$ | $\frac{-12}{66}$ | $\frac{0}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{22}{66}$ |

$m = E(X) = 22/66 = 1/3$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | total |
|----------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{21}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ | $\frac{66}{66}$ |
| $(x - m)$ | $-7/3$ | $-4/3$ | $-1/3$ | $2/3$ | $5/3$ | |
| $(x - m)^2$ | $49/9$ | $16/9$ | $1/9$ | $4/9$ | $25/9$ | |
| $(x - m)^2 P(X = x)$ | $147/594$ | $192/594$ | $21/594$ | $80/594$ | $250/594$ | $690/594$ |

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{84}{66} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{84 \times 9}{66 \times 9} - \frac{66}{66 \times 9} = \frac{840 - 84 - 66}{66 \times 9} = \frac{840 - 150}{66 \times 9} = \frac{690}{66 \times 9} \end{aligned}$$

Propriété 5 : Formule de Koenig Huygens

$$\| V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exemple

Soit la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$X(\Omega) = [[1; 10]]$ et $P(X = k) = k/55$

Calculer $V(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= 7 & E(X^2) &= 55 \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 55 - 7^2 = 6 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{6} = 2,4 \end{aligned}$$

Démonstration

fin demo

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[(X - m)^2] \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} (k - m)^2 \cdot P(X = k) \end{aligned}$$

avec $m = E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} (k^2 - 2mk + m^2) \cdot P(X = k) \\ &= \underbrace{\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \cdot P(X = k)}_{=E(X^2)} - \sum_{k \in X(\Omega)} 2mk \cdot P(X = k) + \sum_{k \in X(\Omega)} m^2 \cdot P(X = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E(X^2) - 2m \underbrace{\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)}_{=E(X)=m} + m^2 \cdot \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) \\
 &= E(X^2) - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 \\
 &= E(X^2) - m^2 \\
 &= E(X^2) - E(X)^2
 \end{aligned}$$

Propriété 6

- $V(X) \geq 0$
- $V(X) = 0 \iff X$ est une variable certaine (c'est-à-dire : $X(\Omega)$ est réduit à une seule valeur)
- $V(X + b) = V(X)$ $V(aX) = a^2V(X)$ $V(aX + b) = a^2V(X)$
 $\sigma(X + b) = \sigma(X)$ $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$ $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

4 Formule des probabilités totales

Rappel : Si (A_1, \dots, A_n) SCE

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)$$

Exemple : $X(\Omega) = [[2, 3, 4, 5, 6]]$

Un SCE adapté à X est : $\{(X = 2), (X = 3), (X = 4), (X = 5), (X = 6)\}$

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(B \cap (X = 2)) + P(B \cap (X = 3)) + \dots + P(B \cap (X = 6)) \\
 &= P(X = 2)P_{X=2}(B) + P(X = 3)P_{X=3}(B) + \dots + P(X = 6)P_{X=6}(B)
 \end{aligned}$$

Propriété 7 : Variable finie

- Soient X une variable aléatoire finie et A un événement
- Alors $\{(X = x), x \in X(\Omega)\}$ est un SCE
- et $P(A) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(A \cap (X = x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P_{(X=x)}(A)$

Propriété 8 : Variable entière finie

- Soit X une variable aléatoire entière finie telle que $X(\Omega) \subset [[0, n]]$
- Soit A un événement
- Alors $\{(X = k)_{0 \leq k \leq n}\}$ est un SCE
- et $P(A) = \sum_{k=0}^n P(A \cap (X = k)) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P_{(X=k)}(A)$

Exemple

On dispose de 6 urnes $U_1 \dots U_6$. L'urne $U_k (1 \leq k \leq 6)$ contient $k + 1$ boules blanches et $7 - k$ boules noires.
 On dispose d'un dé truqué donnant un résultat noté $X \in [[1, 6]]$ tel que :
 $\forall k \in [[1; 6]], P(X = k) = a \cdot k$ avec $a \in \mathbb{R}$
 On tire le dé, et si $X = k$, on tire une boule dans l'urne k .

1) Déterminer a

$$1 = \sum_{k=1}^6 P(X = k) = a \sum_{k=1}^6 k = a \cdot 21 \implies a = \frac{1}{21}$$

2) calculer $P(B)$, B étant l'évènement « on obtient une boule blanche »

SCE : $\{(X = 1), \dots, (X = 6)\} = \{(X = k), 1 \leq k \leq 6\} = (X = k)_{1 \leq k \leq 6}$

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum P(\dots,) \\
 P(B) &= \sum P(B \dots,) \\
 P(B) &= \sum P(B \cap \underbrace{\dots}_{SCE}) \\
 P(B) &= \sum P(B \cap (X = k)) \\
 P(B) &= \sum_{k=1}^6 P(B \cap (X = k))
 \end{aligned}$$

Si on est dans l'urne U_k proba d'avoir une blanche ?

U_k : $k + 1$ blanche s et $7 - k$ noires => total=8

$$\frac{k + 1}{8} = P(B) \quad \text{HORREUR}$$

$$\frac{k + 1}{8} = P_{(X=k)}(B) = P_{U_k}(B) \quad \text{proba conditionnelle}$$

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum_{k=1}^6 P(X = k)P_{(X=k)}(B) \\
 &= \sum_{k=1}^6 a.k \times \frac{k+1}{8}
 \end{aligned}$$

5 Lois usuelles

5.1 Loi uniforme discrète

Définition 8

- X suit une loi uniforme sur $[[1; n]]$ si et seulement si
- $X(\Omega) = [[1; n]]$
 - $P(X = k) = 1/n$ pour $k \in [[1, n]]$

Propriété 9

$$\| E(X) = (n+1)/2 \quad V(X) = (n^2 - 1)/12$$

5.2 Loi de Bernoulli

Définition 9 : Expérience de Bernoulli

- Une expérience de Bernoulli de paramètre p a deux résultats possibles :
- Succès (avec proba p)
 - ou Echec (avec proba $1 - p$)

Définition 10 : Variable de Bernoulli

- Une variable de Bernoulli X vaut 1 si on a un succès, et 0 si on a un échec. Cette variable suit une loi de Bernoulli de paramètre p ssi :
- $X(\Omega) = \{0; 1\}$
 - $P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$

Propriété 10

$$\| E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

5.3 Loi Binomiale

Soit une suite de n expériences de Bernoulli *indépendantes* et de *même paramètre* p . Soit S le nombre de succès obtenus pendant ces n ex-

périences.

Exemple dans le cas $n = 6$

- $(X = 0)$ aucun succès
 $E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6 +$
 $P(X = 0) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5 \cap E_6)$
 $= P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_6)$
 $= (1 - p)^6$
- $P(X = 6)$? $P(X = 6) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap S_6)$
 $= P(S_1) \times P(S_2) \times \dots \times P(S_6)$
 $= p^6$
- $P(X = 2)$
 2 succès et 4 échecs
 Par exemple :
 $S_1 S_2 E_3 E_4 E_5 E_6$
 $E_1 S_2 E_3 E_4 S_5 E_6$
 etc.
 chaque histoire est caractérisée par l'emplacement des 2 succès :
 $S_1 S_2 E_3 E_4 E_5 E_6 \leftrightarrow \{1, 2\} = \{2, 1\}$
 $E_1 S_2 E_3 E_4 S_5 E_6 \leftrightarrow \{2, 5\}$

Il suffit de choisir une combinaison de 2 parmi $\binom{6}{2}$

$$p(S_1 S_2 E_3 E_4 E_5 E_6) = p^2(1 - p)^4$$

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} p^2(1 - p)^4$$

- $p(X = 3)$?
- $P(X = 3) = \binom{6}{3} p^3(1 - p)^3$
- **Généralisation** : n quelconque (n nombre d'expériences)

$$X = k \iff k \text{ succès et } (n - k) \text{ échecs}$$

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

$$\text{Vérification : } \sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{Binome de Newton}$$

$$= (p + (1 - p))^n = 1^n = 1$$

Définition 11 : loi binomiale

X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$ si et seulement si :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$

- Pour $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Propriété 11 : nombre de succès

Le nombre de succès dans une suite de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p suit la loi binomiale de paramètres (n, p)

Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

Alors $S = X_1 + \dots + X_n$ est le nombre de succès obtenus et donc suit la loi binomiale de paramètres (n, p)

$S = 3 \iff$ '3 parmi les X_i sont égales à 1 et les autres à 0 \iff 3 succès exactement

S donne bien le nombre de succès
 S suit une loi binomiale

Propriété 12 : somme de va de Bernoulli

La somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p suit la loi binomiale de paramètres (n, p)

Propriété 13

$$\| E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

$$E(S) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$$

$$V(S) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = p(1 - p) + \dots + p(1 - p) = np(1 - p)$$

6 Calculs**6.1 Loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$**

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \text{ pour } k \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

6.2 Loi binomiale

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

Espérance et variance s'obtiennent sans aucun problème comme espérance et variance de la somme de n variables indépendantes et de même paramètre.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On peut donc considérer X comme la somme de n variables de Bernoulli X_1, \dots, X_n indépendantes et de même paramètre p : $X = X_1 + \dots + X_n$

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n \times p$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \\ &= n \times p(1 - p) \end{aligned}$$

Cela dit, on peut le retrouver par le calcul (ce qui est idiot en soi d'après ce qui précède, mais ce type de calculs est à savoir faire et refaire jusqu'à plus soif)

On a besoin de la propriété très utile (à connaître!) :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

Démonstration :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)! [(n-k) - (k-1)]!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + 0 \cdot P(X=0) \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} \quad \text{avec } j = k-1 \end{aligned}$$

$$\text{Rappel : } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = (a+b)^n \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^j b^{n-1-j} = (a+b)^{n-1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} \\ &= np [p + (1-p)]^{n-1} \quad \text{binôme de Newton} \\ &= np \quad \text{On n'est pas teureu} \end{aligned}$$

Variance :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) P(X=k) \quad \text{Théorème du transfert} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{termes 0 et 1 nuls} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = k(k-1) \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \quad \text{pour } \boxed{2 \leq k \leq n} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} (1-p)^{n-(j+2)} \quad \text{avec } j = k-2 \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{(n-2)-j} \\ &= n(n-1) p^2 [p + (1-p)]^{n-2} \quad \text{Binôme de Newton} \\ &= n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Or } E(X(X-1)) &= E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) \\ \Rightarrow E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) = n(n-1)p^2 + np \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np - np^2 \\ &= np(1-p) \quad \text{Omneztrézeureu.} \end{aligned}$$