

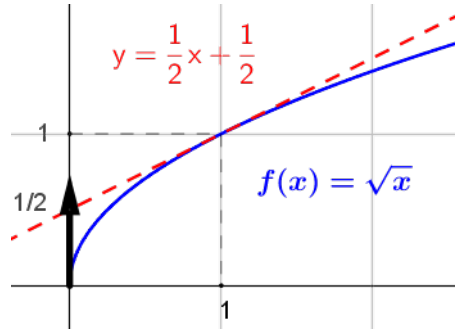
1) $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 103a)

2) Les racines cubiques de l'unité sont : (C 323d)

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ (C 443a)

Tangente verticale en 0



4) Soit $q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \iff q > 1$ (C 518b)

5) Formule de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1} \text{ pour } 0 \leq p \leq n \quad (C 631b)$$

6) $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$ (C 781)

$$\forall u \in \underline{E}, \quad u \in f^{-1}(B) \iff \underline{f(u)} \in B$$

7) Vrai ou Faux ? ... **Vrai** (C 844a)

$$x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - x^3$$

En effet : $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $x - x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
 Remarque : cet équivalent est vrai mais n'a aucun intérêt

8) Le domaine de définition de arctan est : \mathbb{R} (C 904a)

9) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto 4x + \sqrt{2x}$ (C 1037b)

On admet que f est bijective et on note f^{-1} sa réciproque

Calculer $f(2)$, justifier que f^{-1} est dérivable en 2 et déterminer $(f^{-1})'(10)$

$$f(2) = 8 + 2 = 10 \quad f'(x) = 4 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

f est dérivable en 2 et $f'(2) \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $10 = f(2)$ et $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{2}{9}$

10) Si f est impaire sur l'intervalle I et $(a, b) \in I^2$ (C 1109e)

Alors $\int_{-a}^{-b} f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$ **Démontrez-le !**

changement de variable $t = -u \Rightarrow dt = -du$

Bornes $\begin{cases} t = -b & u = a \\ t = -a & u = a \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{-b} f(t) dt &= \int_a^b f(-u)(-du) = \int_a^b -f(u)(-du) \quad \text{car } f \text{ impaire} \\ &= - \int_b^a f(u) du \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

11) Inégalité de Taylor Lagrange (C 1146a)

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

avec f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I , $(a, b) \in I^2$

et $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}$

12) Convergence des suites monotones : **Cas décroissant** (C 1232a)

Si la suite u est décroissante et minorée par un réel m

Alors la suite u converge vers une limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell \geq m$

13) Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $f \leq g$ sur I (C 1408a)

alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

14) En utilisant l'Inégalité des accroissements finis (C 1603d)

Encadrer $\ln(n+1) - \ln(n-1)$ pour $n \geq 2$

Posons $f(t) = \ln t \quad \forall t \in [n-1, n+1], f'(t) = \frac{1}{t}$

Or $0 < n-1 \leq t \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{n-1}$

D'après l'IAF $\frac{1}{n+1} \leq \frac{f(n+1) - f(n-1)}{(n+1) - (n-1)} \leq \frac{1}{n-1}$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n-1) \leq \frac{2}{n-1}$

15) Donner un exemple tel que (C 1814d)

$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ et la série $\sum u_k$ diverge

Par exemple, la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$

16) Critères de convergence d'une série : Équivalence (C 1831c)

Soient deux séries $(\sum u_k)$ et $(\sum v_k)$ à termes positifs

telles que $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} v_k$

Alors $(\sum u_k)$ converge $\iff (\sum v_k)$ converge (même nature)

17) Soit f une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$ (C 1860c)

Déterminer une majoration de $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ à l'aide d'intégrale

f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$ car $k \leq k+1$ (BBS)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$

$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$

18) Vrai ou faux? ... **Faux** (C 2612b)

Soient A et B deux matrices telle que $AB = I$

Alors A et B sont inversibles et $B = A^{-1}$

Il faut que A et B soient des matrices **carrées**

Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = I_2$

Pourtant ni A ni B ne sont inversibles

19) $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ deux bases d'un ev E (C 2771b)

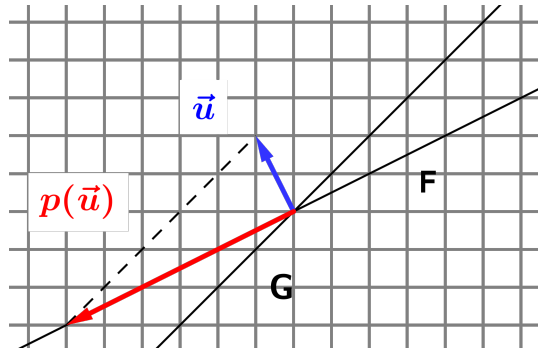
et $u_1 = b_1 + 3b_2$ $u_2 = 4b_1 + 2b_2$ Une matrice s'écrit sans calcul.

$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de \mathcal{B} dans \mathcal{U}

20) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et \mathcal{B} une base de E (C 2920a)

f injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre

- 21) Représenter **précisément** l'image de \vec{u} par la projection sur F parallèlement à G (C 2969a)



- 22) Propriété (Caractérisation par les racines) : (E 3136d)
 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $d^\circ P \leq n$
 Si P admet au moins $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0$

- 23) Déterminer le reste de la division euclidienne de : (E 3151a)
 de $A = X^7 + 2X^6 + 2$ par $B = (X - 1)^2$
sans faire de division euclidienne

On a $A = (X - 1)^2 \cdot Q + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 2 \Rightarrow R = aX + b$
 $\Rightarrow A' = 7X^6 + 12X^5 = 2(X - 1)Q + (X - 1)^2 Q' + a$
 En particulier en $x = 1$ $A'(1) = 19 = a$ et $A(1) = 5 = a + b$
 $\Rightarrow b = 5 - 19 = -14 \Rightarrow R = 19X - 14$

- 24) Soient E_1, \dots, E_n , ensembles finis (C 965)
 $|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \times \dots \times |E_n|$

- 25) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 3313a)
 Soit $a \neq b$. (a, b, a) est un 3-liste

- 26) $E = \{a, b\} \Rightarrow \mathfrak{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ (C 3324b)

- 27) Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 4 cartes. (C 3353)
 il y a exactement 1 carreau et 2 trèfles ?

On tire simultanément : Combinaisons

On prend 1 carreau parmi 8 : 8 choix

2 trèfles parmi 8 : $\binom{8}{2}$ choix

1 quatrième carte (coeur ou pique) parmi 16 : 16 choix

$$\text{Total} : 8 \times \binom{8}{2} \times 16 = 8 \times \frac{8 \times 7}{2!} \times 16 = 8 \times 4 \times 7 \times 16$$

- 28) Définition d'un système complet d'évènements A_1, A_2, A_3 . (C 1002a)
 (A_1, A_2, A_3) est un SCE \iff
 • A_1, A_2, A_3 sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$)
 • $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

- 29) Vrai ou Faux ?... **Faux** (E 4007a)
 Si A, B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ quand les évènements sont **incompatibles**

- 30) Urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 Vertes, 6 noires (E 4011b)
 On tire successivement et avec remise 3 boules $P(\text{au moins une verte}) ?$

$$\begin{aligned} P(\text{au moins une verte}) &= 1 - P(\text{aucune verte}) = 1 - P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}) \\ &= 1 - P(\overline{V_1}) \times P(\overline{V_2}) \times P(\overline{V_3}) \quad (\text{Tirages indépendants car avec remise}) \\ &= 1 - \left(\frac{10}{15}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

On peut aussi le faire par dénombrement : $|\Omega| = 15^3$
 $|A| = |\text{au moins une verte}| = |\Omega| - |\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}| = 10^3$ et
 $P(A) = |A|/|W| = 1 - 1 - \left(\frac{10}{15}\right)^3$