

**Exercice 1**

On dispose de 6 urnes  $U_1 \dots U_6$ .

L'urne  $U_k$  ( $1 \leq k \leq 6$ ) contient  $k+1$  boules blanches et  $7-k$  boules noires.

On dispose d'un dé truqué donnant un résultat noté  $X \in [[1, 6]]$  tel que :

$$\forall k \in [[1; 6]], P(X = k) = a.k \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

On tire le dé, et si  $X = k$ , on tire une boule dans l'urne  $k$ .

- 1) Déterminer  $a$
- 2) calculer  $P(B)$ ,  $B$  étant l'évènement « on obtient une boule blanche »

**Exercice 2**

nIE 348

Dans cet exercice, on se propose de retrouver la loi binomiale en faisant une démonstration par récurrence.

Soient  $X_1, X_2, \dots$ , une suite infinie de variables de Bernoulli de paramètre  $p$  mutuellement indépendantes. On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

1. Montrer que  $S_1$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(1, p)$
2. On suppose que  $S_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
Et on veut montrer que  $S_{n+1}$  suit la loi  $\mathcal{B}(n+1, p)$ 
  - a. Exprimer  $S_{n+1}$  en fonction de  $S_n$
  - b. Déterminer  $S_{n+1}(\Omega)$
  - c. Déterminer  $P(S_{n+1} = 0)$  et  $P(S_{n+1} = n+1)$
  - d. Pour  $1 \leq k \leq n$ , donner  $P(S_{n+1} = k)$  en utilisant le SCE ( $X_{n+1} = 0$ ), ( $X_{n+1} = 1$ )  
Puis en déduire une expression en fonction de  $S_n$   
Enfin, retrouver la valeur de  $P(S_{n+1} = k)$
  - e. Conclure

**Exercice 3** *Cet exercice reprend en partie le schéma précédent*

On dispose d'une urne contenant, au début, une boule blanche et une boule noire. Après chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur. Et on effectue une suite de tirages de cette façon. Ainsi à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  tirage, l'urne contient  $n+2$  boules.

On définit :  $X_k = 1$  si la boule tirée au  $k^{\text{ème}}$  tirage est noire,  $X_k = 0$  sinon

On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  qui correspond au nombre de boules noires tirées au cours de  $n$  premiers tirages

1. Déterminer la loi de  $S_1$
2. Montrer que  $S_2$  suit la loi uniforme sur  $[[0, 2]]$
3. On suppose que  $S_n$  suit la loi uniforme sur  $[[0, n]]$ . Et on veut montrer que  $S_{n+1}$  suit la loi uniforme sur  $[[0, n+1]]$ .
  - a. Exprimer  $S_{n+1}$  en fonction de  $S_n$
  - b. Déterminer  $S_{n+1}(\Omega)$
  - c. Déterminer  $P(S_{n+1} = 0)$  et  $P(S_{n+1} = n+1)$
  - d. Pour  $1 \leq k \leq n$ , montrer que  $P(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$
  - e. Conclure

**Exercice 4**

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. telles que  $Y = X^2$ . La loi de  $X$  est donnée par :

$$P(X = -2) = P(X = 0) = P(X = 2) = 1/6 ;$$

$$P(X = -1) = P(X = 1) = 1/4$$

1. Donner la loi du couple  $(X, Y)$  sous forme d'un tableau
2. Déterminer la loi de  $Y$
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $\text{cov}(X, Y)$ .
5. Que montre cet exercice ?

**Exercice 5**

Pour ce jeu, le participant lance successivement  $n$  boules au hasard dans  $N$  cases numérotées de 1 à  $N$  avec  $N \geq 2$ .

On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est  $\frac{1}{N}$ . Une case peut contenir plusieurs boules.

Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de cases non vides à l'issue des  $n$  lancers.

- Déterminer en fonction de  $n$  et de  $N$  les valeurs prises par  $T_n$ .
- Donner les lois de  $T_1$  et  $T_2$ .
- Déterminer, lorsque  $n \geq 2$ , la probabilité des événements  $[T_n = 1]$ ,  $[T_n = 2]$ ,  $[T_n = n]$ . (Pour la dernière probabilité on distinguera deux cas  $n > N$  et  $n \leq N$ ).
- A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ ,

$$(I) \quad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N}P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N}P([T_n = k-1])$$

- Afin de calculer l'espérance  $E(T_n)$  de la variable  $T_n$ , on considère la fonction polynomiale  $G_n$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^n P([T_n = k])x^k$$

- Quelle est la valeur de  $G_n(1)$  ?
- Exprimer  $E(T_n)$  en fonction de  $G'_n(1)$ .
- montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x-x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$
- En déduire que :  $E(T_{n+1}) = (1 - \frac{1}{N})E(T_n) + 1$
- Déterminer  $E(T_n)$  en fonction de  $n$

**Exercice 6**

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à  $p$ ,  $p \in ]0; 1[$ .

On pourra noter  $q = 1 - p$ .

Soit  $N$  un entier naturel non nul fixé.

On effectue  $N$  lancers du dé ; si  $n$  est le nombre de " 6 " obtenus, on lance alors  $n$  fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de la manière suivante :

- $Z$  indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
- $X$  indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
- $Y$  indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi,  $X + Y = Z$  et, si  $Z$  prend la valeur 0, alors  $X$  et  $Y$  prennent la valeur 0.

- Préciser la loi de  $Z$ , son espérance et sa variance.
- Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer la probabilité conditionnelle  $P_{(Z=n)}(X = k)$ . On distinguera les cas :  $k \leq n$  et  $k > n$ .
- Montrer pour tout couple d'entiers naturels  $(k, n)$  tel que  $0 \leq k \leq n \leq N$  :

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

- Calculer  $P(X = 0)$
  - Calculer  $P(X = 1)$
  - Calculer la probabilité  $P(X = k)$  pour  $0 \leq k \leq n$
- Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $X$   
Donner sans calculs la loi de la variable aléatoire  $Y$
  - Est-ce que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ?  
Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .

**Exercice 7**

$X_1, X_2, X_3, X_4$  sont 4 variables de Bernoulli de même paramètre  $p$  mutuellement indépendantes.

On pose  $T = X_1 \cdot X_2$   $U = X_2 \cdot X_3$   $V = X_3 \cdot X_4$

- Donner la loi des variables  $T$ ,  $U$ ,  $V$
- Donner la loi conjointe de  $(T, V)$
- Donner la loi conjointe de  $(T, U)$   
 $T$  et  $U$  sont-elles indépendantes ?

Indication : On pourra déterminer l'événement  $(T = 1 \cap U = 1)$