Exercice 1

Calculer $a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 2

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$

où pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$

Exercice 4 Déterminants de Vandermonde

1) Calculer $V_2(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$

2) Calculer $V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ sous forme factorisée

3) Soient $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

$$P(X) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \dots & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

a) Déterminer le terme dominant de $P(X)$

b) Monter que $a_1, \dots a_{n-1}$ sont racine de P

c) En déduire l'expression de $P(X)$ en fonction de $V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}$

d) Puis l'expression de $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ sous forme de produit

Exercice 5