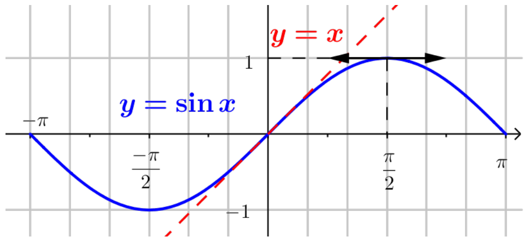
1) $\left|\dfrac{1+3\mathbf{i}}{(-1+\mathbf{i})^3}\right| = \dfrac{|1+3\mathbf{i}|}{|-1+\mathbf{i}|^3} = \dfrac{\sqrt{10}}{(\sqrt{2})^3} = \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C 221c)

2) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sin x$ sur $[-\pi,\ \pi]$ (C 446a)



Tracer la tangente en 0 et <u>donner son équation</u> : $y = x$

La tangente doit passer par le point $(\pi/2, 1, 5)$ à peu de chose près

3) <u>Définition</u> : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,\ -x)$ (C 560b)

4) $x \notin A \cap B \iff x \notin A$ OU $x \notin B$ (C 742a)

Ecrire « x n'appartient pas à A et B » n'a aucun sens logique

5) $f = o(h)$ et $g = o(h)$ en $a \Rightarrow f.g = o(h^2)$ en a (C 823d)

En effet $f = o(h)$ et $g = o(h) \Rightarrow \dfrac{f}{h} \to 0$ et $\dfrac{g}{h} \to 0$

$\Rightarrow \dfrac{f}{h} \cdot \dfrac{g}{h} \to 0 \Rightarrow f.g = o(h^2)$

6) <u>Définition</u> : $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante sur I (C 1000d)

$\iff \forall (x,y) \in I^2,\quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

7) <u>Théorème de l'intégration par parties</u> (C 1101)

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $a,\ b \in I$

Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$

Attention : $a < b$ n'a RIEN à faire ici

8) L'équation $y' + a.y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(a,\ \lambda) \in \mathbb{C}^2$ (C 1152a)
admet une solution particulière y_1 de la forme :

- 1er cas : si $\underline{\lambda \neq -a}$ alors $\underline{y_1(x) = K.\mathrm{e}^{\lambda x}}$
- 2ème cas : si $\underline{\lambda = -a}$ alors $\underline{y_1(x) = K.x.\mathrm{e}^{\lambda x}}$ avec $K \in \mathbb{C}$

9) Soit $x \in \mathbb{R}$ Donner $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et **démontrez-le !** (C 1253)

$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx \Rightarrow x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \quad \text{car } n > 0$$

Quand $n \to +\infty,\ 1/n \to 0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

10) Soit f croissante sur $]a,\ b[$ avec $a < b$, $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1416c)

Si f <u>n'est pas minorée</u> sur $]a, b[$ alors $\displaystyle\lim_{x \to a} f = -\infty$

11) **Théorème de Rolle** (C 1600)

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

12) Condition **<u>nécessaire</u>** de convergence de la série $(\sum u_k)$: (C 1814a)

Si <u>la série $(\sum u_k)$ converge</u> alors $\underline{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

13) Critères de convergence d'une série : Domination (C 1831d)

Soient deux séries à termes positifs $\sum u_k$ et $\sum v_k$

telles que $u_k = O(v_k)$ (en $+\infty$)

Alors $\sum v_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_k$ converge

et $\sum u_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_k$ diverge

14) Soit f une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$ (C 1860b)

Déterminer une minoration de $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'aide de $\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t$

f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc $\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq f(k)$ car $k \leq k+1$ (BBS)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \Rightarrow \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t \leq S_n - f(n)$

$\Rightarrow f(n) + \int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t \leq S_n$

15) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 1888b)

$1 \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{\cos n})$

Car $\left|\frac{1}{1/\cos n}\right| = |\cos n| \leq 1$

16) **Propriété** : $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux familles de vecteurs de E (C 2752a)

$\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$

17) Soit $f : E \to F$ une application linéaire (C 2904b)

$f = \bar{0} \iff \mathrm{Ker} f = E$

18) Soient $E = F \oplus G$. (C 2961a)

et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G

Alors $u \in F \iff s(u) = u$

19) Formule de Leiniz pour les polynômes : (C 3123)

$$\forall P,\ Q \in \mathbb{K}[X], \quad (P.Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

20) Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (C 3175c)

qui n'admet aucune racine réelle, et qui n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$

Par exemple : $P = X^2 + 1 = (X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i})$

ou encore $P = X^2 + X + 1 = (X - j)(X + j)$

21) Vrai ou Faux...**Faux** (C 3313c)

(a, b, c) est une combinaison.

(a, b, c) est une liste ou un arrangement

22) **Situation type** : combinaison de p parmi n (E 3335c)

On tire simutanée p boules dans une urne contenant n boules

(On peut le faire aussi avec des cartes, des sselets, des trombones,...)

23) Soit φ est une forme bilinéaire réelle sur E (C 3601b)

φ est dite positive $\iff$ $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) \geq 0$

24) Inégalité de Cauchy-Schwarz : (C 3615a)

$\forall (u, v) \in E^2, \quad |\ \langle u|v \rangle\ | \leq \|u\|.\|v\|$

25) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 4001e)

Si B et C sont incompatibles

alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$

26) **Vrai ou Faux ?**...Vrai (C 4007d)

Si A, B, C, D sont mutuellement independants,

alors $P(A \cap B \cap D) = P(A).P(B).P(D)$

27) Urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 Vertes, 6 noires (C 4011g)

On tire successivement et avec remise 2 boules Calculer la probabilité que la 1ere soit verte sanchant qu'au moins une des deux boule est rouge tirée

Successif avec remise : liste de 2 parmi 15 : $|\Omega| = 15^2$

$$P_{(R_1 \cup R_2)}(V_1) = \frac{P\big((R_1 \cup R_2) \cap V_1\big)}{P(R_1 \cup R_2)} = \frac{|R_1 \cup R_2) \cap V_1|}{|R_1 \cup R_2|}$$

Or $|(R_1 \cup R_2) \cap V_1| = |V_1 \cap R_2|$ car R_1, V_1 incompatibles

$= 5 \times 4$

$|R_1 \cup R_2| = |R_1| + |R_2| - |R_1 \cap R_2| = 4 \times 15 + 15 \times 4 - 4 \times 4 = 4 \times 26$

$$P_{(R_1 \cup R_2)}(V_1) = \frac{20}{4 \times 26} = \frac{5}{26}$$

28) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) =$ $aE(X) + b$ (C 4023b)

29) Soient $(X_1,\ X_2, X_3$ (C 4043b)

3 variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

Alors $X_1 + X_2 + X_3$ suit la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(3, p)$

30) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 4120a)

Si X, Y sont indépendantes Alors $E(XY) = E(X)E(Y)$