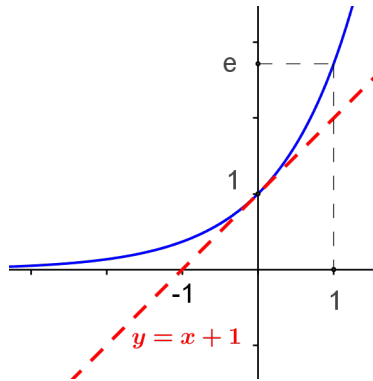


1) $e^{ix} = i \iff e^{ix} = e^{i\pi/2} \iff e^{i(x-\pi/2)} = 1$
 $\iff x - \pi/2 = 2k\pi \iff x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 249d)

2) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto e^x$ (C 440a)
 et tracer une tangente particulière



3) (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ (C 515b)

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

4) Formule de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ pour } 0 \leq p \leq n$$
 (C 630)

5) $f \underset{0}{\sim} h$ et $g \underset{0}{\sim} h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f - g) = 0$ est Faux (C 825d)

Contre-exemple : $h(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$
 $g(x) = -1 + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ mais $f(x) - g(x) = 2 \not\rightarrow 0$

6) Vrai ou Faux? ... **Faux** (C 919c)

$$\cos a = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \arccos \frac{3}{5}$$

Il faut aussi avoir $a \in [0, \pi]$:

$$(\cos a = \frac{3}{5} \text{ ET } a \in [0, \pi]) \Rightarrow a = \arccos \frac{3}{5}$$

En effet, il existe **une infinité** d'angles tels que $\cos a = \frac{3}{5}$ mais **un seul** angle qui est égal à $\arccos \frac{3}{5}$

7) Si f est continue sur $[a, b]$ (C 1101)

Alors $\int_a^b f(t) dt$ existe

8) Traduire « à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$ » (C 1204a)

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < v_n$$

9) Vrai ou Faux? ... **Faux** (C 1299c)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$

Alors f admet un DL à l'ordre 2 en a

$$\iff f \text{ admet une dérivée seconde en } a$$

10) **Théorème des valeurs intermédiaires** (C 1420c)

Dans le cas où f est une fonction réelle continue sur un intervalle I

avec $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$:

Alors, pour tout $y_0 \in [f(b), f(a)]$

il existe au moins un $x_0 \in [a, b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$

11) Égalité des accroissements finis (C 1601)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

12) Vrai ou faux? **Faux** (C 1820b)

Les séries $(\sum u_k)_{k \geq 0}$ et $(\sum u_k)_{k \geq p}$

sont de meme nature et ont la même somme.

Elles sont de même nature mais **elles n'ont pas la même somme**

13) Critères de convergence des séries à termes positifs (C 1836a)

Pour les différents critères, dire si

$$\sum u_k \text{ converge} \Rightarrow \sum v_k \text{ converge}$$

est **Vrai ou Faux**

- Comparaison $u_n \leq v_n$ **Faux**
- domination $u_n = O(v_n)$ **Faux**
- Négligeabilité $u_n = o(v_n)$ **Faux**
- Équivalence $u_n \sim v_n$ **Vrai**

14) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3n^2 - 2}$ converge-t-elle? (C 1875b)

$$\frac{2}{3n^2 - 2} \sim \frac{2}{3n^2} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge (Série de Riemann)}$$

Les séries sont à termes positifs (à partir du rang 1)

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{2}{3n^2 - 2} \text{ converge}$$

15) Vrai ou Faux?.. **Faux** (C 1881a)

$$u_n = O(v_n) \Rightarrow u_n = o(v_n)$$

16) Démontrer que $2 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\cos n}\right)$ (C 1888c)

$$\left| \frac{2}{1/\cos n} \right| = |2 \cos n| \leq 2 \Rightarrow 2 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\cos n}\right)$$

17) Définition : Un espace vectoriel E est de dimension n (C 2724b)

\iff il existe une base de E contenant n vecteurs.

ou bien \iff toute base de E contient n vecteurs.

18) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ (C 2903a)
des bases respectives de E et F .

$$\text{Soit } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base de $\text{Im} f$: (u_2, u_3) Base de $\text{Ker} f$: (e_3, e_4)

19) Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 (C 2965a)
de p la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(e_2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car si $u \in F$, $p(u) = u \Rightarrow p(e_1) = e_1, p(e_3) = e_3$,
et si $u \in G$, $p(u) = 0 \Rightarrow p(e_2) = 0$

20) Vrai ou Faux?.. **Faux** (C 3133d)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$,

$$P(a) = P'(a) = 0 \Rightarrow a \text{ est une racine double de } P$$

a peut être racine de multiplicité **plus grande ou égale** que 2

$$P(a) = P'(a) = 0 \Rightarrow a \text{ est une racine au moins double de } P$$

On a en fait :

a est une racine double de P

$$\iff P(a) = P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) \neq 0$$

21) Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une familles d'ensembles (C 3307a)

finis deux à deux disjoints, alors : $\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|$

- 22) Nombre d'applications d'un ensemble A à n éléments vers un ensemble B à p éléments = p^n (C 3320a)

Pour chaque élément de A , il y a p choix possibles d'images, donc au total, $p \times p \cdots \times p = p^n$ possibilités. C'est aussi le nombre de listes de n éléments parmi p : $(f(1), f(2), \dots, f(n))$

- 23) Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 4 cartes. (C 3350)
Combien y a-t-il de résultats possibles où il y a exactement 1 carreau ?

On tire simultanément : combinaisons de 4 parmi 32

1 carreau parmi 8 et 3 non carreaux parmi 24 :

$$8 \times \binom{24}{3} = 8 \times \frac{24 \times 23 \times 22}{6} = 8 \times 6 \times 23 \times 22$$

- 24) $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire canonique sur $E = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ (C 3605c)

Soit $f(t) = t$ $g(t) = t^2$ Calculer $(f|g)$

$$(f|g) = \int_0^2 f(t)g(t) dt = \int_0^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4$$

- 25) **Définition** : Soient deux vecteurs non nuls u et v (C 3617a)

u, v sont colinéaires de même sens $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, v = \lambda u$

- 26) Pour (A_1, A_2, \dots, A_n) un SCE, formules des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \times P_{A_k}(B) \quad (C 4004b)$$

- 27) Urne contient 15 boules : 4 rouges, 5 Vertes, 6 noires (C 4010c)

On tire simultanément 3 boules' Calculer la probabilité d'obtenir exactement 1 verte OU exactement 1 Rouge

Tirage simultané \rightarrow combinaisons avec équiprobabilité $|\Omega| = \binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} = 5 \times 7 \times 13$

$$|1V \cup 1R| = |1V| + |1R| - |1V \cap 1R|$$

- On tire 1V parmi 5 et 2 non-V parmi 10 :

$$|1V| = 5 \times \binom{10}{2} = 5 \times \frac{10 \times 9}{2} = 5 \times 5 \times 9 = 25 \times (10 - 1) = 250 - 25 = 225$$

- On tire 1R parmi 4 et 2 non-R parmi 11 :

$$|1R| = 4 \times \binom{11}{2} = 4 \times \frac{11 \times 10}{2} = 4 \times 11 \times 5 = 11 \times 20 = 220$$

- On tire 1V parmi 5, 1R parmi 4, 1N parmi 6 :

$$|1V \cup 1R| = 5 \times 4 \times 6 = 120$$

$$|1V \cup 1R| = 225 + 220 - 120 = 225 + 100 = 325$$

$$P(1V \cup 1R) = \frac{|1V \cup 1R|}{\Omega} = \frac{325}{5 \times 7 \times 13} = \frac{65}{7 \times 13} = \frac{5 \times 13}{7 \times 13} = \frac{5}{7} \quad (\text{aux erreurs de calcul près})$$

- 28) On tire simultanément 3 boules (E 4010g)

dans une urne contenant 4 boules rouges, 5 Vertes, 6 Noires, Calculer la probabilité d'obtenir 1 seule boule verte ($V = 1$) sachant qu'au moins une boule est rouge ($R \geq 1$)

Tirage simultané \rightarrow combinaisons avec équiprobabilité

$$P(V = 1 | R \geq 1) = \frac{P(V = 1 \cap R \geq 1)}{P(R \geq 1)} = \frac{\text{Card}(V = 1 \cap R \geq 1)}{\text{Card}(R \geq 1)}$$

$$\text{Card}(R \geq 1) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(R = 0) = \binom{15}{3} - \binom{11}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Card}(V = 1 \cap R \geq 1) &= \text{Card}(V = 1) - \text{Card}(V = 1 \cap R = 0) \\ &= \binom{5}{1} \binom{10}{2} - \binom{5}{1} \binom{6}{2} \end{aligned}$$

car $\text{Card}(V = 1 \cap R = 0) = \text{Card}(V = 1 \cap N = 2)$

$$P(V = 1 | R \geq 1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2} - \binom{5}{1} \binom{6}{2}}{\binom{15}{3} - \binom{11}{3}}$$

29) Définition (pas König Huyghens) : Soit X une variable aléatoire finie

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \quad (\text{C 4022a})$$

ou encore $V(X) = E((X - m)^2)$ avec $m = E(X)$

30) Donner le cadre d'obtention d'une loi binomiale : (C 4033a)

Au choix :

• **Version 1**

Si X est le nombre de succès dans une suite de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

Alors X suit la loi binomiale de paramètres (n, p)

• **Version 2**

Si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p

Alors X suit la loi binomiale de paramètres (n, p)

31) Vrai ou Faux ? ... **Vrai** (C 4120a)

Si X, Y sont indépendantes Alors $E(XY) = E(X)E(Y)$