

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

\Rightarrow Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

Montrons $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

• $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont des ev de E donc $0 \in \text{Im}(f)$ et $0 \in \text{Ker}(f)$

$\Rightarrow \{0\} \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$

• Mq $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subset \{0\}$

Soit $u \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$

$u \in \text{Im}f \Rightarrow \exists v \in E$ tel que $u = f(v)$

Or $u \in \text{Ker}f \Rightarrow f(u) = 0 \Rightarrow f(f(v)) = 0$

$\iff (f \circ f)(v) = 0 \iff v \in \text{Ker}f^2$

Or $\text{Ker}f^2 = \text{Ker}f$

$\Rightarrow v \in \text{Ker}f$

$\Rightarrow f(v) = 0$

Or $f(v) = u$

$\Rightarrow u = 0$

Donc $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subset \{0\}$

• Conclusion : on a bien $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

\Leftarrow Supposons $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

Montrons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

• Soit $u \in \text{Ker}f$

On a $f(u) = 0$

$\Rightarrow f(f(u)) = f(0) = 0$ car f est linéaire

$\Rightarrow u \in \text{Ker}f^2$

Donc $\text{Ker}f \subset \text{Ker}f^2$

• Soit $u \in \text{Ker}f^2$

$\Rightarrow f^2(u) = 0$

$\Rightarrow f(f(u)) = 0$

$\Rightarrow f(v) = 0$ en posant $v = f(u)$

$\Rightarrow v \in \text{Ker}f$

De plus $v = f(u) \Rightarrow v \in \text{Im}f$

D'où $v \in \text{Ker}f \cap \text{Im}f$

Or, par hypothèse, $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0\}$

$\Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow f(u) = v = 0$

$\Rightarrow u \in \text{Ker}f$

Donc $\text{Ker}f^2 \subset \text{Ker}f$

• Conclusion : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

Exercice 2 Matrice d'une projection

Soit F le sev de \mathbb{R}^3 d'équation $2x + y + z = 0$

Soit $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 0, 1)$

1. Soit p la projection sur F parallèlement à G

Déterminer Π la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

§ **Anna-Lise**

Supposons qu'il existe $v \in F$ et $w \in G$ tel que $m = v + w$

$v \in F$ d'équation $2x + y + z = 0$

$\Rightarrow v = (a, b, c)$ avec $2a + b + c = 0$

$w \in \text{Vect}(u) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, w = ku = (k, 0, k)$

De plus $m = v + w$

$$\iff \begin{cases} a + k = x \\ b = y \\ c + k = z \end{cases}$$

$$2L_1 + L_2 + L_3 \Rightarrow \underbrace{(2a + b + c)}_{=0} + 3k = 2x + y + z$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{3}(2x + y + z) \Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{3}(2x + y + z, 0, 2x + y + z)}$$

D'où $v = u - w$
 $= \frac{1}{3}(3x, 3y, 3z) - \frac{1}{3}(2x + y + z, 0, 2x + y + z)$

$$\boxed{v = \frac{1}{3}(x - y - z, 3y, -2x - y + 2z)}$$

§ **Saint Taize**

$$\bullet \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - y - z \\ 3y \\ -2x - y + 2z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 0 \\ 2x + y + z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u = v + w$$

$$\bullet w = \frac{1}{3}(2x + y + z) \cdot (1, 0, 1) \Rightarrow w \in \text{Vect}(u)$$

$$\bullet 2a + b + c = \frac{1}{3}(2(x - y - z) + 3y + (-2x - y + 2z))$$

$$= \frac{1}{3}(2x - 2y - 2z + 3y - 2x - y + 2z) = 0$$

§ Conclusion : il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $m = v + w$

D'où $\boxed{p(x, y, z) = v = \frac{1}{3}(x - y - z, 3y, -2x - y + 2z)}$

$$p(m) = \begin{pmatrix} (x - y - z)/3 \\ y \\ (-2x - y + 2z)/3 \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

2. En déduire Σ_2 ,
 la matrice de s_2 la symétrie par rapport à G **parallèlement à F** ,
 toujours dans la base canonique de \mathbb{R}^3

$$m = \underbrace{w}_{\in G} + \underbrace{v}_{\in F}$$

$$\Rightarrow s_2(m) = w - v = (m - v) - v = m - 2v = m - 2p(m) = (\text{Id} - 2p)(m)$$

$$\Rightarrow s_2 = \text{Id} - 2p$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma_2 = I - 2\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3

Soit la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n^2}$ et la fonction $f :]0, +\infty[$ définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

a) Établir le tableau de variations complet de f

• f est continue dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x^2) - (\ln x)(x^2)'}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \ln x > 0 \iff \ln x < 1/2 \iff x < e^{1/2} = \sqrt{e}$$

• Qd $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{Croissance comparée})$$

• $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	1	\sqrt{e}	$+\infty$				
$f'(x)$		+	+	0	-			
f	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	\searrow	$1/e$	\searrow	0

b) Calculer la primitive de f définie par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \ln t \frac{1}{t^2} dt$$

Intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = 1/t \\ v'(t) = 1/t^2 & v(t) = -1/t \end{cases}$ $u, v \in C^1$ sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt \\ &= \frac{-\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= \frac{-\ln x}{x} - \left[\frac{1}{x} - 1 \right] \\ &= 1 - \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{x - 1 - \ln x}{x} \end{aligned}$$

c) Étudier la convergence de cette série.

$$u_n = \frac{\ln n}{n^2}$$

$$n^{3/2} u_n = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{Croissance comparée})$$

$$\Rightarrow u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or la série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^{3/2}})$ converge (car $3/2 > 1$) et les séries sont à termes positifs

Donc la série $(\sum \frac{\ln n}{n^2})$ converge

d) Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

Puisque la série converge, son reste R_n existe bien.

e) En comparant avec une intégrale, déterminer un équivalent de R_n en $+\infty$

• **Étape 1** : Encadrement de $\sum_{k=n}^p f(k)$

$\sqrt{e} < 2$ donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$

Donc, pour $k \geq 2$ et pour $t \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow ((k+1) - k)f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq ((k+1) - k)f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{p-1} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{p-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{p-1} f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k'=n+1}^p f(k') \leq \int_n^p f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{p-1} f(k)$$

$$\Rightarrow -f(n) + \sum_{k=n}^p f(k) \leq \int_n^p f(t) dt \leq -f(p) + \sum_{k=n}^p f(k)$$

$$\text{Or } -f(n) + \sum_{k=n}^p f(k) \leq \int_n^p f(t) dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^p f(k) \leq f(n) + \int_n^p f(t) dt$$

$$\text{Et } \int_n^p f(t) dt \leq -f(p) + \sum_{k=n}^p f(k)$$

$$\Rightarrow f(p) + \int_n^p f(t) dt \leq \sum_{k=n}^p f(k)$$

D'où

$$f(p) + \int_n^p f(t) dt \leq \sum_{k=n}^p f(k) \leq f(n) + \int_n^p f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \int_n^p f(t) dt &= F(p) - F(n) = \left[1 - \frac{1 + \ln p}{p} \right] - \left[1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right] \\ &= -\frac{1 + \ln p}{p} + \frac{1 + \ln n}{n} \end{aligned}$$

• **Étape 2** : Encadrement de R_n

Quand $p \rightarrow +\infty$

$$\frac{1 + \ln p}{p} \rightarrow 0 \text{ et } f(p) = \frac{\ln p}{p^2} \rightarrow 0 \quad (\text{Croissance comparée})$$

$$\text{et } \sum_{k=n}^p f(k) \rightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n$$

Donc

$$\frac{1 + \ln n}{n} \leq R_n \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1 + \ln n}{n}$$

• **Étape 3** : équivalent de R_n

En multipliant par $\frac{n}{\ln n} > 0$

$$\Rightarrow \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{1 + \ln n}{n} \leq \frac{n}{\ln n} \cdot R_n \leq \frac{n}{\ln n} \left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1 + \ln n}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln n} + 1 \leq \frac{\ln n}{n} R_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln n} + 1$$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty \quad \frac{-1}{\ln n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{Donc, par encadrement } \left(\frac{\ln n}{n} R_n \right) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$$

Exercice 4

On dispose de 2 urnes contenant chacune 1 boule Rouge, 2 Noires et 3 Vertes. On tire une première boule dans la première urne, et on la met dans la deuxième urne. Puis on tire une boule dans la deuxième urne.

1) Calculer la probabilité d'avoir une boule Noire au deuxième tirage

Cela dépend du premier tirage. Choisissons le SCE $(N_1, \overline{N_1})$.

D'après la FPT :

$$P(N_2) = P(N_1)P(N_2|N_1) + P(\overline{N_1})P(N_2|\overline{N_1})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3+4}{21} \quad \boxed{P(N_2) = \frac{1}{3}}$$

2) On a obtenu une boule Noire au deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir eu une boule Noire au premier tirage ?

$$\boxed{P(N_1|N_2)} = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(N_1) \cdot P(N_2|N_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

3) Les événements N_1 et V_2 sont-ils indépendants ?

$$P(V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) + P(\overline{V_1})P(V_2|\overline{V_1})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4+3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } P(V_2|N_1) = \frac{3}{7} \neq \frac{1}{2}$$

$P(V_2|N_1) \neq P(V_2)$ Donc N_1 et V_2 **ne sont pas indépendants**.

4) La boule obtenu au deuxième tirage **n'est pas** Noire . Quelle la probabilité que la première n'ait pas été Verte ?

$$\text{On cherche } P(\overline{V_1}|\overline{N_2}) = \frac{P(\overline{V_1} \cap \overline{N_2})}{P(\overline{N_2})}$$

$$P(\overline{V_1} \cap \overline{N_2}) = P((N_1 \cup R_1) \cap \overline{N_2}) = P((N_1 \cap \overline{N_2}) \cup (R_1 \cap \overline{N_2}))$$

$$= P(N_1 \cap \overline{N_2}) + P(R_1 \cap \overline{N_2}) = P(N_1) \cdot P(\overline{N_2}|N_1) + P(R_1) \cdot P(\overline{N_2}|R_1)$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{13}{42}$$

$$P(\overline{N_2}) = 1 - P(N_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où } P(\overline{V_1}|\overline{N_2}) = \frac{13/42}{2/3} = \frac{13}{42} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{13}{28}}$$

Autre méthode (due à Stanislas)

$$P_{N_2}(\overline{V_1}) = 1 - P_{N_2}(V_1) = 1 - \frac{P(V_1 \cap \overline{N_2})}{P(\overline{N_2})} \quad (1)$$

$$P(V_1 \cap \overline{N_2}) = P(V_1) \cdot P_{V_1}(\overline{N_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$$

$$P(\overline{N_2}) = 1 - P(N_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc avec (1)} \quad P_{N_2}(\overline{V_1}) = 1 - \frac{5/14}{2/3} = 1 - \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{2} = \frac{28}{28} - \frac{15}{28} = \frac{13}{28}$$

5) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires apparues au cours des deux tirages. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

On tire entre 0 et 2 boules noires : $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$

$$P(X = 0) = P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) = P(\overline{N_1})P(\overline{N_2}|\overline{N_1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

$$(X = 1) \iff (N_1 \overline{N_2} \cup \overline{N_1} N_2)$$

$$P(X = 1) = P(N_1)P(\overline{N_2}|N_1) + P(\overline{N_1})P(N_2|\overline{N_1})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4+4}{21} = \frac{8}{21}$$

$$P(X = 2) = P(N_1)P(N_2|N_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{21}$$

k	0	1	2	total
$P_X(k) = P(X = k)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{21}{21}$
$k.P(X = k)$	0	$\frac{8}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{14}{21}$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2)$$

$$= 0 + \frac{8}{21} + 2 \cdot \frac{3}{21} = \frac{2}{3}$$

Exercice 5

Soit f une fonction C^1 sur un segment $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \quad \text{avec} \quad a_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

On se propose de démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_a^b f(t) dt$

a) Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$

Soit f une fonction C^1 sur $[a, b]$

f' est donc continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée.

C'est-à-dire il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$

b) En déduire que pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(t) - f(a_k)| \leq M\delta_n \quad \text{avec} \quad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

De plus f est continue et dérivable sur $[a, b]$

Donc d'après l'IAF, on a :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad (1)$$

Pour $t \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a, b]$ $|f(t) - f(a_k)| \leq M|t - a_k|$

avec $a_k \leq t \leq a_{k+1} \implies 0 \leq t - a_k \leq a_{k+1} - a_k$

$\implies |t - a_k| \leq a_{k+1} - a_k = \delta_n$ D'où $|f(t) - f(a_k)| \leq M\delta_n$

c) En déduire une majoration de $\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right|$

On a $a_k \leq a_{k+1}$ (BBS) Donc

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt$$

et $|f(t) - f(a_k)| \leq M\delta_n$

$$\implies \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} M\delta_n dt = M\delta_n(a_{k+1} - a_k) = M\delta_n^2$$

$$\implies \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(a_k)] dt \right| \leq M\delta_n^2$$

d) En déduire un majoration de $\left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right|$ ne dépendant que de n, a, b, M

$$\text{Or} \quad \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt$$

$$= \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \delta_n f(a_k)$$

On somme pour $k \in [[0, n - 1]]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \delta_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

$$= \int_a^b f(t) dt - S_n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(a_k)] dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(a_k)] dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \delta_n^2 \quad (\text{d'après c}) \\ &= n M \delta_n^2 = n M \frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{M(b-a)^2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } 0 \leq \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$$

e) Conclure sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ puis sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M(b-a)^2}{n} = 0 \quad \text{Donc par encadrement}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{Or } S'_n = S_n + \frac{b-a}{n} (f(a_n) - f(a_0)) = S_n + \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 6

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 6\text{Id}_E = 0$ avec $f^2 = f \circ f$

1) Montrer que f est bijective et exprimer sa réciproque en fonction de f .

$$\text{On a } f \circ f + f - 6\text{Id} = 0$$

$$\Rightarrow f \circ f + f = -6\text{Id}_E$$

$$\Rightarrow f \circ \left(\frac{-1}{6}f + \frac{-1}{6}\text{Id}_E \right) = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1}{6}f + \frac{-1}{6}\text{Id}_E \right) \circ f = \text{Id}_E$$

$$\text{Donc } f \text{ est bijective et sa réciproque est } f^{-1} = \frac{-1}{6}f + \frac{-1}{6}\text{Id}_E$$

2) Établir que $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit $u \in E$

• **Analyse** Soit $u \in E$

Supposons qu'il existe $v, w \in F \times G$ tel que $u = v + w$

$$v \in F = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \quad \Rightarrow \quad (f - 2\text{Id}_E)(v) = 0 \Rightarrow f(v) = 2v$$

$$\text{De même } w \in G = \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) \quad \Rightarrow \quad f(w) = -3w$$

$$\text{Or } u = v + w \Rightarrow f(u) = f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{car } f \text{ linéaire}$$

$$\Rightarrow f(u) = 2v - 3w$$

$$\text{D'où } \begin{cases} v + w = u \\ 2v - 3w = f(u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} v + w = u \\ -5w = -2u + f(u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 5L_1 + L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 5v = 3u + f(u) \\ -5w = -2u + f(u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}f(u) \\ w = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}f(u) \end{cases}$$

• **Synthèse**

$$\S \quad v + w = \left(\frac{3}{5}u + \frac{1}{5}f(u) \right) + \left(\frac{2}{5}u - \frac{1}{5}f(u) \right) = \frac{5}{5}u = u$$

$$\begin{aligned} \S \quad f(v) - 2v &= f\left(\frac{3}{5}u + \frac{1}{5}f(u) \right) - 2\left(\frac{3}{5}u + \frac{1}{5}f(u) \right) \\ &= \frac{3}{5}f(u) + \frac{1}{5}f^2(u) - \frac{6}{5}u - \frac{2}{5}f(u) \\ &= \frac{1}{5}(3f(u) + f^2(u) - 6u - 2f(u)) \\ &= \frac{1}{5}(f^2(u) + f(u) - 6u) \\ &= \frac{1}{5}(f^2 + f - 6\text{Id}_E)(u) \\ &= 0 \quad \text{car } f^2 + f - 6\text{Id}_E = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = F$$

$$\begin{aligned} \S \quad f(w) + 3w &= f\left(\frac{2}{5}u - \frac{1}{5}f(u) \right) + 3\left(\frac{2}{5}u - \frac{1}{5}f(u) \right) \\ &= \frac{2}{5}f(u) - \frac{1}{5}f^2(u) + \frac{6}{5}u - \frac{3}{5}f(u) \\ &= \frac{1}{5}(2f(u) - f^2(u) + 6u - 3f(u)) \\ &= \frac{1}{5}(-f^2(u) - f(u) + 6u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{5}(f^2 + f - 6\text{Id}_E)(u) \\
 &= 0 \quad \text{car} \quad f^2 + f - 6\text{Id}_E = 0
 \end{aligned}$$

Donc $w \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E) = G$

§ Conclusion :

Il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

Donc E et G sont supplémentaires de E ($E = F \oplus G$)

3) On note $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n fois

a) Pour $v \in F$ et $w \in G$, calculer $f^n(v)$ et $f^n(w)$

Soit $v \in F$ On a $f(v) = 2v$

$\Rightarrow f^2(v) = f(f(v)) = f(2v) = 2^2v$ car f est linéaire

Hérédité : Supposons $f^n(v) = 2^n v \Rightarrow f^{n+1} = (f \circ f^n)(v)$

$= f(f^n(v)) = f(2^n v) = 2^n f(v) = 2^n \cdot 2v = 2^{n+1}v$

Donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(v) = 2^n v$

De même, $f^n(w) = (-3)^n w$

b) Soit $u \in E$ quelconque. D'après ce qui précède il existe $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

Exprimer $f^n(u)$ en fonction de v et w , puis en fonction de u

$$\begin{aligned}
 f^n(u) &= f^n(v) + f^n(w) \\
 &= 2^n v + (-3)^n w \\
 &= 2^n \left(\frac{3}{5}u + \frac{1}{5}f(u)\right) + (-3)^n \left(\frac{2}{5}u - \frac{1}{5}f(u)\right) \\
 &= \frac{1}{5}(3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n)u + \frac{1}{5}(2^n - (-3)^n)f(u)
 \end{aligned}$$

c) En déduire que f^n s'écrit sous la forme $f^n = \alpha_n \cdot f + \beta_n \cdot \text{Id}_E$ où α_n et β_n sont des réels dont on donnera les expressions en fonction de n .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 f^n(u) &= +\frac{1}{5}(2^n - (-3)^n)f(u) + \frac{1}{5}(3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n)\text{Id}_E(u) \\
 &= \left(\frac{1}{5}(2^n - (-3)^n)f + \frac{1}{5}(3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n)\text{Id}_E\right)(u)
 \end{aligned}$$

Donc $f^n = \frac{1}{5}((2^n - (-3)^n) \cdot f + (3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n) \cdot \text{Id}_E)$

Problème

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère l'application S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = JMJ$.

1. Montrer que J est inversible et donner son inverse

On a $J.J = I$ Donc J est inversible et $J^{-1} = J$.

Ou bien par le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . J \iff L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . J$$

Donc J est inversible et $J^{-1} = J$

2. a) Montrer que l'application S ainsi définie est une application linéaire.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in [\mathcal{M}_2(\mathbb{R})]^2$

$$\begin{aligned} S(a.M + b.N) &= J.(a.M + b.N).J \\ &= J.(aM).J + J.(bM).J \\ &= a.J.M.J + b.J.M.J \end{aligned}$$

car un réel commute toujours avec les matrices

$$= a.S(M) + b.S(N)$$

S est donc une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

S est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- b) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$.

Soient M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} S(M)S(N) &= (JMJ).(JNJ) \\ &= JM.(J.J).NJ \\ &= JM.I.NJ \quad \text{car } J^2 = I \\ &= J(MN).J \\ &= S(MN) \end{aligned}$$

3. Montrer que S est une symétrie par rapport à un sev F parallèlement à un sev G .

(On ne cherchera pas à trouver F et G dans cette question).

S est une symétrie vectorielle ssi S est linéaire et $S \circ S = S$

On sait déjà (2a) que S est linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (S \circ S)(M) &= S(S(M)) = S(JMJ) = J(JMJ)J = J^2MJ^2 \\ &= M \quad \text{car } J^2 = I \end{aligned}$$

$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (S \circ S)(M) = M$ Donc $S \circ S = \text{Id}_E$

Conclusion : S est une symétrie vectorielle par rapport à un sev $F = \text{Ker}(S - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(S + \text{Id}_E)$ (avec $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

4. On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que (I, J) est une base de F et (K, L) une base de G

Justifier que (I, J, K, L) est une base de E et donner la matrice de S dans cette base.

- Calculons d'abord $S(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} S(M) &= JMJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $S(I) = I$ et $S(J) = J \Rightarrow (I, J) \in F^2 \Rightarrow \text{Vect}(I, J) \subset F$
De plus (I, J) est libre $\Rightarrow \dim F \geq 2$
De même $S(K) = -K$ $S(L) = -L \Rightarrow (K, L) \in G^2$
 $\Rightarrow \text{Vect}(K, L) \subset G$ avec (K, L) libre $\Rightarrow \dim G \geq 2$
- S est la symétrie par rapport à F parallèlement à G

Donc $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim F + \dim G = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$

Or $\dim F \geq 2$ et $\dim G \geq 2 \Rightarrow \dim F = \dim G = 2$

- (I, J) famille libre de F et $\dim F = 2 \Rightarrow (I, J)$ base de F

De même (K, L) est une base de G

Et comme $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow (I, J, K, L)$ base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- D'après les calculs précédent

$$S(I) = I, S(J) = J, S(K) = -K, S(L) = -L$$

Donc la matrice de S dans cette base est : $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Pour toute matrice M , on note M_+ et M_- les matrices vérifiant

$$M = M_+ + M_- \quad \text{et} \quad (M_+, M_-) \in F \times G$$

- a) À titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On va essayer d'utiliser ce qui précède (Le but est tout de même de réfléchir pour éviter des calculs sans fin.)

$$M = M_+ + M_- \quad \text{et} \quad (M_+, M_-) \in F \times G$$

$$\Rightarrow S(M) = S(M_+) + S(M_-) = M_+ - M_-$$

$$\Rightarrow M_+ = \frac{1}{2}(M + S(M)) \quad \text{et} \quad M_- = \frac{1}{2}(M - S(M))$$

$$\text{Ici, } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_+ = \frac{1}{2}(A + S(A)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_- = \frac{1}{2}(A - S(A)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- b) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à F appartient aussi à F .

Que peut-on dire du produit de deux éléments de G ?

- Soient $M, N \in F^2 \Rightarrow S(M) = M$ et $S(N) = N$

Or d'après la question 2a) : $S(MN) = S(M)S(N)$

Donc $S(MN) = M.N \Rightarrow MN \in F$

- De même si $(M, N) \in G^2$, $S(M) = -M$ et $S(N) = -N$

$\Rightarrow S(MN) = S(M)S(N) = (-M)(-N) = MN$

$\Rightarrow MN \in F$

- c) Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+ , M_- , N_+ et N_-

Montrons que le produit d'une matrice de F par une matrice de G appartient à G

Soit $M \in F$ et $N \in G$

Alors $S(M) = M$ et $S(N) = -N$

$$\Rightarrow S(M.N) = S(M).S(N) = M.(-N) = -M.N$$

D'où : $M.N \in G$

On montre de même que : $M \in G$ et $N \in F \Rightarrow M.N \in G$

Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cherchons maintenant $(MN)_+$ et $(MN)_-$

On a : $M = M_+ + M_-$ et $N = N_+ + N_-$

Donc

$$\begin{aligned} M.N &= (M_+ + M_-).(N_+ + N_-) \\ &= M_+N_+ + M_-N_+ + M_+N_- + M_-N_- \\ &= (M_+N_+ + M_-N_-) + (M_-N_+ + M_+N_-) \end{aligned}$$

Or $M_+ \in F$, $N_+ \in F$ et $M_- \in G$, $N_- \in G$

Donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} M_+N_+ &\in F, \quad M_-N_- \in F, \quad M_-N_+ \in G, \quad M_+N_- \in G \\ \Rightarrow (M_+N_+ + M_-N_-) &\in F \quad \text{et} \quad (M_-N_+ + M_+N_-) \in G \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} (M.N)_+ = M_+N_+ + M_-N_- \\ (M.N)_- = M_-N_+ + M_+N_- \end{cases}$$

Musée des horreurs

On ne tripote pas les conditions

$$P_{V_1}^-(\overline{N_2}) = P_{(R_1 \cup V_1)}(\overline{N_2}) = P_{R_1}(\overline{N_2}) + P_{V_1}(\overline{N_2})$$

$$P(N_2) = P_{N_1}(N_2) + P_{\overline{N_1}}(N_2)$$

C'est une FGM, (Formule génétiquement modifiée) issue de l'hybridation de la formule des probas totales sous forme conjointe et de la forme conditionnelle.

Bien entendu, comme les OGM, elle est stérile, c'est-à-dire qu'elle est fautive. Remarquons que cette admirable formule permet de calculer des probas supérieures à 1 ce qui est toujours fascinant.

$$N_1 N_2 \text{ et } \overline{N_1} N_2 \text{ sont indépendantes}$$

Il y a confusion entre indépendants et incompatibles.

En fait, c'est deux notions qui sont presque opposées !

Si deux événements sont indépendants, alors ils **ne sont pas** incompatibles. Et s'ils sont incompatibles, alors ils **ne sont pas** indépendants.

- Incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$
- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Les deux notions incompatibles et indépendants sont donc ... incompatibles !

Bases de la rédaction

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} M \delta_n dt$$

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \geq \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right|$$

Deux propositions se succèdent, mais il n'y a aucun lien logique entre les deux.

Ce n'est pas grave si la seconde est conséquence immédiate de la première.

Mais ce n'est pas le cas ici. Il faut donc l'indiquer ! Il suffit par exemple d'écrire le mot magique « OR ».

Ça ne coûte pas cher et cela guide le correcteur dans le raisonnement.

Écrire des mathématiques ce n'est pas aligner des formules sans structure logique. C'est proposer un raisonnement structuré au lecteur.

Kesskeussé ?

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(a_k)] dt \right|$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} [f(t) - f(a_k)] dt \right|$$

Que fait ce signe « \iff » ici ? Cela n'a aucun sens puisque cela relie deux réels.

Essayez donc en général d'écrire des formules mathématiques et/ou logiques qui ont du sens. Cela peut aider.

Le contraire risque d'irriter profondément le correcteur. « Et quand correcteur pas content, correcteur faire comme ça. » (Cf « Le temple du soleil » avec Tintin).

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right|$$

Tiens ! Une valeur absolue qui démarre quelque part, mais qui se termine nulle part. C'est pratique, on ne se prononce pas. C'est bien une écriture de normand : « p'tet bien que oui, p'tet bien que non. P'têt que ça s'arrête ici, ou p'têt plutôt là. » Donc dans le doute on s'abstient. Au correcteur de décider.

Existence de la limite

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$$

$$\frac{M(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \leq 0$$

Attention : principe fondamental :

Pour passer à la limite, il faut **D'ABORD** avoir justifié que la limite existe bien.

Sinon on peut avoir des choses du type

$$(-1)^n \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \leq 1$$

Alors que la limite de $(-1)^n$ **n'existe pas !**

Tout ceci n'est que la conséquence d'un principe essentiel en maths :

Pour travailler sur un objet mathématique, il faut s'assurer que cet objet **EXISTE**

On évite ainsi de raisonner sur les licornes.

Prémises et conclusion

f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$
 D'après l'inégalité des accroissements finis :
 $\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$

C'est très bien rédigé...

Sauf que ce n'est pas du tout ce que dit l'IAF. Ce sont les **prémises** de l'IAF, c'est-à-dire ses **conditions** qui permettent de l'appliquer.

Or certains n'ont toujours pas compris la différence entre prémisses et conclusions d'un théorème. Ce qui est gênant car c'est ce qui constitue la plupart des propriétés et théorèmes.

Si on a la phrase suivante :

« Si je suis multimillionnaire, alors j'achète un vélo »

(Appelons cela le théorème de Servain.)

La **prémisse** est : « je suis multimillionnaire »

et la conclusion est : « j'achète un vélo »

Il est absurde alors d'écrire

« D'après le théorème de Servain, je suis multimillionnaire »

Or c'est exactement la même absurdité que l'horreur ci-dessus.

Remarquons aussi l'erreur fréquente :

« J'ai un vélo donc je suis multimillionnaire »

Cette erreur confond une implication et sa réciproque

En fait, je dois vous faire une confidence : j'ai un vélo et je ne suis pas multimillionnaire !

J'ai eu ainsi droit à des truc du genre :

$$|f(a) - f(b)| \leq M|a - b| \quad \text{donc} \quad |f'(t)| \leq M$$

Généralisation et particularisation

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| \leq M|a_{k+1} - a_k|$$

$$\text{Donc pour } t \in [a_k, a_{k+1}], |f(t) - f(a_k)| \leq M|t - a_k|$$

On n'a absolument le droit de remplacer une valeur **définie** a_{k+1} par une valeur **quelconque** t

C'est aussi absurde que d'écrire $f(1) = 2$ donc $\forall t \in [1, 2], f(t) = 2$

(C'est vrai pour une valeur n'implique pas que c'est vrai pour toutes les valeurs!)

On ne peut pas **généraliser** sans démontrer.

C'est le contraire qui est vrai : On peut **particulariser**

$$\text{Pour tout } t \in [a_k, a_{k+1}], |f(t) - f(a_k)| \leq M|t - a_k|$$

Alors, puisque $a_{k+1} \in [a_k, a_{k+1}]$ on a en particulier

$$|f(a_{k+1}) - f(a_k)| \leq M|a_{k+1} - a_k|$$

Formule sans champ d'application

$$\begin{aligned} |f(t) - f(a_k)| &\leq M\delta_n \\ \int_a^b |f(t) - f(a_k)| dt &\leq \int_a^b M\delta_n \end{aligned}$$

- En écrivant $|f(t) - f(a_k)| \leq M\delta_n$
On ne sait pas pour quelles valeurs de t cette formule est valable. On ne connaît pas son champ d'application.
C'est en soit gênant
- Il faut donc écrire **sur quel intervalle** l'inégalité $|f(t) - f(a_k)| \leq M\delta_n$ est vraie avant d'intégrer.
Or ici, cette inégalité est vraie sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$ et non sur $[a, b]$
Donc on ne peut l'intégrer que sur $[a_k, a_{k+1}]$ et donc pas sur $[a, b]$

Une création mondiale

$$\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Ker} f - 2\text{Ker} \text{Id}_E \quad \text{car la fonction } \text{Ker} \text{ est linéaire}$$

Le concept me semble intéressant à creuser...