

Professeur : SERVAIN
Classe : PCSI

Discipline : Maths
Durée de l'épreuve : 4 h 00

- Marge droite de 2 cm
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

*On commencera chaque **Partie** sur une copie différente*

Partie 1

On commencera chaque exercice sur une nouvelle page

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

Exercice 2 Matrice d'une projection

Soit F le sev de \mathbb{R}^3 d'équation $2x + y + z = 0$

Soit $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 0, 1)$

1. Soit p la projection sur F **parallèlement à G**

Déterminer Π la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3

2. En déduire Σ_2 ,

la matrice de s_2 la symétrie par rapport à G **parallèlement à F** , toujours dans la base canonique de \mathbb{R}^3

Exercice 3

Soit la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n^2}$ et la fonction $f :]0, +\infty[$ définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

a) Établir le tableau de variations complet de f

b) Calculer la primitive de f définie par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

c) Étudier la convergence de cette série.

d) Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

e) En comparant avec une intégrale, déterminer un équivalent de R_n en $+\infty$

Exercice 4

On donnera explicitement les formules utilisées.

On donnera les différents résultats sous forme de fractions irréductibles.

On dispose de 2 urnes contenant chacune 1 boule Rouge, 2 Noires et 3 Vertes

On tire une première boule dans la première urne, et on la met dans la deuxième urne. Puis on tire une boule dans la deuxième urne.

- 1) Calculer la probabilité d'avoir une boule Noire au deuxième tirage
- 2) On a obtenu une boule Noire au deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir eu une boule Noire au premier tirage ?
- 3) Les événements N_1 et V_2 sont-ils indépendants ?
- 4) La boule obtenue au deuxième tirage **n'est pas** Noire . Quelle la probabilité que la première n'ait pas été Verte ?
- 5) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires apparues au cours des deux tirages.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 5

Soit f une fonction C^1 sur un segment $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \quad \text{avec} \quad a_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

On se propose de démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_a^b f(t) dt$

- Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$
- En déduire que pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(t) - f(a_k)| \leq M \delta_n \quad \text{avec} \quad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

- En déduire une majoration de $\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right|$
- En déduire une majoration de $\left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right|$ ne dépendant que de n, a, b, M
- Conclure sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ puis sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$

Exercice 6

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 6 \cdot \text{Id}_E = 0$

avec $f^2 = f \circ f$

- Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
- Établir que $F = \text{Ker}(f - 2 \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(f + 3 \text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
- On note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

- Pour $v \in F$ et $w \in G$, calculer $f^n(v)$ et $f^n(w)$
- Soit $u \in E$ quelconque. D'après ce qui précède il existe $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$
Exprimer $f^n(u)$ en fonction de v et w , puis en fonction de u
- En déduire que f^n s'écrit sous la forme $f^n = \alpha_n \cdot f + \beta_n \cdot \text{Id}_E$
où α_n et β_n sont des réels dont on donnera les expressions en fonction de n .

Problème 1 Sur une nouvelle copie

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère l'application S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = JMJ$.

- Montrer que J est inversible et donner son inverse
- Montrer que l'application S ainsi définie est une application linéaire.
 - Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$.
- Montrer que S est une symétrie par rapport à un sev F parallèlement à un sev G .

Donner une base \mathcal{U} de F et une base \mathcal{V} de G . (On ne cherchera pas à trouver F et G dans cette question).

- On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que (I, J) est une base de F et (K, L) une base de G

Justifier que (I, J, K, L) est une base de E et donner la matrice de S dans cette base.

- Pour toute matrice M , on note M_+ et M_- les matrices vérifiant

$$M = M_+ + M_- \quad \text{et} \quad (M_+, M_-) \in F \times G$$

- A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que le produit de deux matrices appartenant à F appartient aussi à F .
Que peut-on dire du produit de deux éléments de G ?
- Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_- .