

Q 1 : Simplifier
 $a = \sqrt{(3 - \pi)^2} \quad b = \ln(\sqrt{e}) \quad c = \exp(-2 \ln 3) \quad d = e^{\ln 3 - 2 \ln 5}$

$$a = \sqrt{(3 - \pi)^2} = |3 - \pi| = \pi - 3 \quad (\text{car } 3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0)$$

$$b = \ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$c = \exp(-2 \ln 3) = \exp(\ln(3^{-2})) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$d = e^{\ln 3 - 2 \ln 5} = \frac{e^{\ln 3}}{e^{2 \ln 5}} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$$

Q 2 : Calculer $\frac{11!}{8!}$

$$\frac{11!}{8!} = 11 \times 10 \times 9 = 990$$

Q 3 : Pour n entier supérieur ou égal à 1 et k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$
simplifier $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \\ &= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} \\ &= \frac{(n-k-1)!}{(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!}{k!} \\ &= \frac{1}{(n-k)} \cdot \frac{k+1}{1} \\ &= \frac{k+1}{(n-k)} \end{aligned}$$

Q 4 : On admet que 3 est solution de l'équation $-3x^2 + 7x + 6 = 0$,
déterminer de tête 2 constantes a et b telles que pour tout réel x

$$-3x^2 + 7x + 6 = (x-3)(ax+b)$$

puis résoudre l'inéquation $-3x^2 + 7x + 6 \geq 0$

$$(x-3)(ax+b) = ax^2 + \dots - 3b$$

Par identification : $a = -3$ et $-3b = 6 \Rightarrow b = -2$

$$\text{donc } -3x^2 + 7x + 6 = (x-3)(-3x-2)$$

$$\text{Racines } x_1 = 3 \quad -3x-2=0 \iff x_2 = -2/3$$

Trinôme du signe de -3 donc négatif à l'extérieur des racines

$$\text{Donc } S = [-2/3; 3]$$

Q 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x^2+2x} \leq 1$

$$e^{-x^2+2x} \leq 1$$

$$\iff -x^2 + 2x \leq \ln 1 \text{ car } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[$$

$$\iff x(-x+2) \leq 0$$

Deux racines : $x_1 = 0, x_2 = 2$

$$S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

Q 6 : Pour x convenable (et que l'on ne demande pas de préciser), on pose

$$f(x) = \cos(2x) - \cos(\pi/5) \quad g(x) = (\ln(x))^4$$

$$h(x) = (x^2 + x) \exp(2x)$$

Calculer $f'(x), g'(x), h'(x)$

$$f'(x) = -2 \sin(2x) \quad g'(x) = 4(\ln(x))^3 \frac{1}{x} = \frac{4(\ln(x))^3}{x}$$

$$h'(x) = (x^2 + x)' \exp(2x) + (x^2 + x)(\exp(2x))'$$

$$= (2x + 1) \exp(2x) + (x^2 + x)(2 \exp(2x))$$

$$= (2x^2 + 4x + 1) \exp(2x)$$

Q 7 : Calculer $\int_1^e t^2 \ln t \, dt$ à l'aide d'une intégration par partie.

On posera $u(t) = \ln t \quad v'(t) = t^2$

$$\begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = 1/t \\ v'(t) = t^2 & v(t) = t^3/3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e t^2 \ln t \, dt \\ &= \left[(\ln t) \left(\frac{t^3}{3} \right) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3}{3} \, dt \\ &= \left[\ln e \frac{e^3}{3} - 0 \right] - \int_1^e \frac{t^2}{3} \, dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right] \\ &= \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Q 8 : Rappeler la formule d'addition : $\cos(a - b) =$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Q 9 : Calculer $\cos(\pi/12)$
en commençant par calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

D'où

$$\begin{aligned} \cos(\pi/12) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos(\pi/3) \cos(\pi/4) + \sin(\pi/3) \sin(\pi/4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Q 10 : Écrire le nombre complexe $\frac{(3-i)^2}{(2+i)^2}$ sous la forme $x+iy$, x, y réels.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3-i)^2}{(2+i)^2} \\ &= \frac{3^2 - 6i + i^2}{2^2 + 4i + i^2} \\ &= \frac{8 - 6i}{3 + 4i} \\ &= \frac{8 - 6i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ &= \frac{24 - 18i - 32i + 24i^2}{3^2 + 4^2} \\ &= \frac{-50i}{25} \\ &= -2i \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3-i)^2}{(2+i)^2} \\ &= \left(\frac{3-i}{2+i} \right)^2 \\ &= \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} \right)^2 \\ &= \left(\frac{6 - 2i - 3i + i^2}{2^2 + 1^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{5 - 5i}{5} \right)^2 \\ &= (1 - i)^2 \\ &= 1^2 - 2i + i^2 \\ &= -2i \end{aligned}$$

Q 11 : Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-x} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

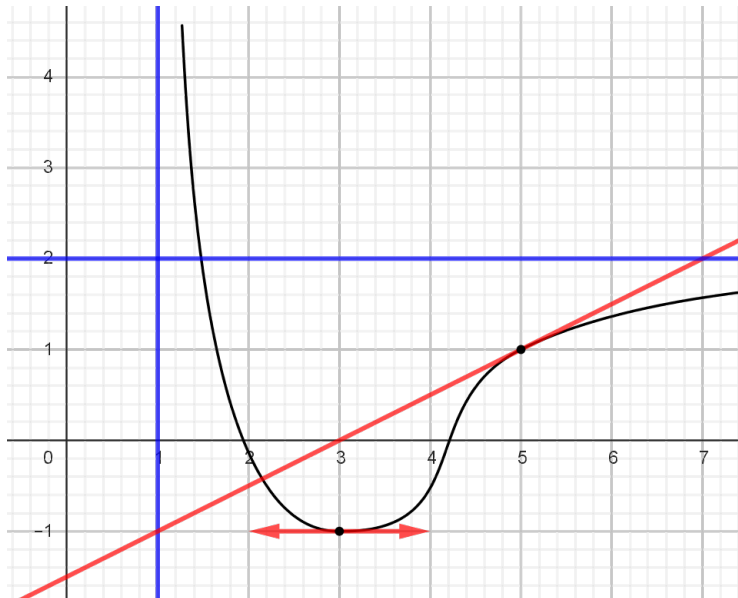
Q 12 : Représenter **soigneusement** une courbe représentative de la fonction f dont on le tableau de variations ci-dessous

x	1	3	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	$1/2$
G	$+\infty$ 			

On commence par tracer les deux asymptotes d'équations $x = 1$ et $y = 2$

Puis la tangente horizontale en $(3,1)$ et la tangente en $(5,1)$ de pente $f'(6) = 1/2$

Enfin, on peut tracer la courbe



Q 13 : On pose $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ Montrer que $\frac{1}{1+u} = u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u} &= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{2 + (\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &= u \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$