

Exercice 1 Voici une liste de propositions

- a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$
- b) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x$
- c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y < x$
- d) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y < x$
- e) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y \leq x$
- f) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y \leq x$
- g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y < x$
- h) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, y \leq x$

1. Certaines de ces propositions sont les négations des autres. Lesquelles ?
2. Pour chacune de ces propositions, démontrer si elles sont vraies ou fausses.

Exercice 2 Traduire en langage naturel les deux propositions suivantes

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0]$
- b) $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0] \text{ ou } [\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0]$

Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ecrire en langage mathématique (à l'aide des quantificateurs usuels) les assertions suivantes. On pourra utiliser les connecteurs logiques "et", "ou" et " $\implies$ ".

- a. f est positive sur $\mathbb{R}$.
- b. f admet un signe constant sur $\mathbb{R}$.
- c. f n'admet pas un signe constant sur $\mathbb{R}$.
- d. f s'annule
- e. f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
- f. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- g. f est constante.

- h. f n'est pas constante.
- i. f est majorée.
- j. f n'est pas minorée.
- k. f n'est pas bornée
- l. 32 n'a pas d'antécédent par f .
- m. 4 a un antécédent par f .
- n. 5 admet au plus un antécédent par f
- o. 5 a exactement un antécédent par f .
- p. f est décroissante sur $\mathbb{R}$
- q. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- r. f est monotone.
- s. f admet un maximum, atteint en un réel compris entre 1 et 2.

Exercice 4

On donne les propositions suivantes :

- a) $\forall x \in A, x < 15 \text{ ET } x > 1$
- b) $\forall x \in A, x < 3,5 \text{ OU } x > 3,5$
- c) $\forall x \in A, x < 5 \text{ OU } x > 6$
- d) $\forall x \in A, \exists y \in A, x < y$
- e) $\forall x \in A, \exists y \in A, x > y$
- f) $\exists x \in A, \forall y \in A, x \leq y$
- g) $\forall x \in A, x \leq 6 \implies x < 6$
- h) $\forall x \in A, x \leq 0 \implies x < 0$

Les propositions précédentes sont-elles vraies ou fausses avec les ensembles suivants ?

$A =$	$\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$	$\{-1, 1, 3, 7, 14\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
a						
b						
c						
d						
e						
f						
g						
h						