

1 Premiers éléments de logique

1.1 Propositions mathématiques

Une proposition est une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse.

Exemples :

- « $0 = 1$ » est une proposition (fausse)
- « 2 est un nombre positif » est une proposition (vraie)
- « tout entier admet un entier qui lui est strictement supérieur » est une proposition (vraie)
- « Il existe un entier relatif inférieur à tous les entiers relatifs » est une proposition (fausse)
- « $2+3$ » **n'est pas** une proposition logique

La proposition contraire de p est appelée « non- p »

On la note : $\neg p$ ou $\bar{p}$

« non- p » est vraie si et seulement si p est faux.

Ce qui donne la « table de vérité » élémentaire suivante :

p	non-p
V	F
F	V

2 Quantificateurs

2.1 introduction

« $x > 0$ » n'est pas en soi une proposition correcte en mathématique. En effet, il faut savoir si on veut que **tous** les x soient positifs, ou bien simplement qu'**au moins un** x soit positif. Il s'agit donc de « quantifier » cette proposition pour qu'elle ait un sens précis.

Il faut de plus savoir dans quel ensemble on « prend » les x

On écrira alors :

« Tous les x réels sont tels que $x > 0$ »

ou

« Il existe (au moins) un x réel tel que $x > 0$ »

Ce qui se notera respectivement :

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ (Proposition fausse)

$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$ (Proposition vraie)

$\exists x$	Il existe x tel que
$\forall x$	Quelque soit x ; Pour tout x

ATTENTION : On ne peut pas commuter les quantificateurs $\exists$ et $\forall$

$(\forall y \in E, \exists x \in E) \neq (\exists x \in E, \forall y \in E)$

- $(\forall y \in E, \exists x \in E)$ Pour tout y , on peut trouver un x et x **peut dépendre** de y .
- $(\exists x \in E, \forall y \in E)$ On peut trouver un x qui « marche » pour tous les y . C'est **le même** x qui va marcher pour tous les y .

En fait, on a : $(\exists x \in E, \forall y \in E) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E)$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples :

- $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, x > y$ est vraie
- $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x > y$ est fausse

2.2 Négation d'une proposition quantifiée

On remplace dans l'ordre chaque quantificateur par l'autre quantificateur. Puis on prend la négation de la proposition finale.

Exemples :

proposition	Sa négation
$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$	$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$

2.3 Démonstrations

La démonstration doit suivre l'ordre des quantificateurs en utilisant les mots clés

Proposition	Démonstration
$\forall x \in A, x > 0$	Soit $x \in A$ on a $x > 0$
$\exists x \in A, x^2 < 1$	Prenons $x = \dots$ On a $x \in A$ On a : $x^2 < 1$
$\forall x \in A, \exists y \in B, x \leq y$	Soit $x \in A$ Prenons $y = \dots$ On a $y \in B$ et on a $x \leq y$
$\exists x \in A, \forall y \in B, x < y$	Prenons $x = \dots$, On a $x \in A$ Soit $y \in B$ on a bien $x < y$

2.4 « aucun »

On a vu qu'il n'y avait que deux quantificateurs : l'existentiel (au moins un) et universel (tout le monde). C'est un peu sommaire direz-vous. Certes, mais ces deux quantificateurs permettent de traduire tout le reste. Par exemple on peut avoir envie de dire : « aucun »

« Aucun x ne vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$ »

se traduit par :

$$\forall x, \neg \mathcal{P}(x)$$

2.5 Unicité

Voir après l'implication

3 Connecteurs logiques

A partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres à partir des connecteurs logiques.

- p ET q ($p \wedge q$) : « p et q » est vrai si et seulement si p et q le sont (en même temps).
- p OU q ($p \vee q$) : « p ou q » est vrai si p ou q le sont

Remarque :

c'est le « ou inclusif » : on peut avoir simultanément p et q vrais ou seulement l'un des deux.

Tout cela est résumé par les tables de vérités :

p	q	p ET q	p OU q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Propriété 1 : Lois de Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \text{ ET } q) &\iff (\neg p) \text{ OU } (\neg q) \\ \neg(p \text{ OU } q) &\iff (\neg p) \text{ ET } (\neg q) \end{aligned}$$

4 Fonctions

- Graphes, équation droite, de tangente
- Asymptotes

Propriété 2

$$\begin{aligned} &\bullet \lim_{x \rightarrow a} = \pm\infty \\ &\iff C_f \text{ admet une asymptote } \mathbf{verticale} \text{ en } a \text{ d'équation } x = a \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} = a \\ &\iff C_f \text{ admet une asymptote } \mathbf{horizontale} \text{ en } \pm\infty \text{ d'équation } y = a \end{aligned}$$

- Dérivées, composée
- Fonctions usuelles

5 Fonction particulières

5.1 Partie entière

Définition 1 : Partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique **entier** $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1$$

Cette entier est appelé la *partie entière* du réel x est notée $\lfloor x \rfloor$

On a donc

$$\lfloor x \rfloor = n \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = n + \alpha \\ n \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0, 1[\end{cases}$$

Propriété 3 : partie entière

- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Définition 2 : approximation décimale

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès) les nombres $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.

Ces nombres encadrent x

5.2 min et max

Définition 3 : min, max

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels.

$\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le plus petit de ces réels

$\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le plus grand de ces réels

Propriété 4

$$\begin{aligned} \min(a, b) + \max(a, b) &= a + b \\ \min(a, b) \times \max(a, b) &= a \times b \end{aligned}$$

Propriété 5 : Inégalités

- $\min(x_1, \dots, x_n) \leq a$
 $\iff x_1 \leq a \text{ ou } x_2 \leq a \dots \text{ ou } x_n \leq a$
 $\iff \exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq a$
- $\min(x_1, \dots, x_n) \geq a$
 $\iff x_1 \geq a \text{ et } x_2 \geq a \dots \text{ et } x_n \geq a$
 $\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq a$
- $\max(x_1, \dots, x_n) \leq a$
 $\iff x_1 \leq a \text{ et } x_2 \leq a \dots \text{ et } x_n \leq a$
 $\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq a$
- $\max(x_1, \dots, x_n) \geq a$
 $\iff x_1 \geq a \text{ ou } x_2 \geq a \dots \text{ ou } x_n \geq a$
 $\iff \exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq a$

5.3 Valeur absolue

Définition 4 : Valeur absolue

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x, -x)$$

$$\text{Si } x \geq 0, -x \leq 0 \leq x \Rightarrow \max(x, -x) = x = |x|$$

$$\text{Si } x < 0, -x > 0 \Rightarrow x < -x \Rightarrow \max(x, -x) = -x = |x|$$

Propriété 6 : Double inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Propriété 7 : Valeur absolue

$$\left\| \begin{array}{l} \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \bullet |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0) \quad |x^n| = |x|^n \\ \bullet |-x| = |x| \\ \bullet |x|^2 = x^2 \\ \bullet \sqrt{x^2} = |x| \end{array} \right.$$

Propriété 8 : équation, inéquation

$$\left\| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \text{ Si } r < 0, \\ \quad |x| < r \text{ est impossible} \\ \quad |x| > r \text{ est toujours vrai} \\ \bullet \text{ Si } r > 0 \\ \quad |x| < r \iff -r < x < r \\ \quad |x| > r \iff x < -r \text{ ou } x > r \end{array} \right.$$

Propriété 9 : distance

$$\left\| \text{ Pour } A, B \text{ de coordonnées respectives } a, b \in \mathbb{R} : |b - a| = AB \right.$$

Propriété 10 : conséquences

$$\left\| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \text{ Pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } r > 0 \\ \quad \S \quad |x - a| < r \iff x \in]a - r, a + r[\\ \quad \iff a - r < x < a + r \\ \quad \S \quad |x - a| > r \iff x \in \mathbb{R} \setminus [a - r, a + r] \\ \quad \iff x < a - r \text{ ou } x > a + r \\ \bullet \text{ Pour } a \leq b, \quad x \in [a, b] \iff \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{|a-b|}{2} \end{array} \right.$$

6 Calculsa) **Puissances (dont forme exp) :****Définition 5 : Puissances**

$$\left| \quad \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a} = \exp(b \ln a) \right.$$

Définition 6 : Racine $n^{\text{ème}}$

$$\left| \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln x} \right.$$

b) Exp et log

c) **Expression conjuguée**L'expression conjuguée de $a + b\sqrt{r}$ est $a - b\sqrt{r}$ L'expression conjuguée de $a - b\sqrt{r}$ est $a + b\sqrt{r}$

Cela sert à virer les racines dans un dénominateur.

$$\text{Exemple : } A = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{1 + 3\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + 2\sqrt{3}}{1 + 3\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 3\sqrt{3}}{1 - 3\sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 \times 3}{1^2 - 3^2 \times 3} \\ &= \frac{-5 - \sqrt{3}}{-26} = \frac{5}{26} + \frac{3}{26}\sqrt{3} \end{aligned}$$

d) $\frac{(a \pm b)^3 - a^3 \pm b^3}{}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } (a, b) \in \mathbb{C}^2$$

$$\begin{aligned} \bullet (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^2 + b^2 =$ PFC
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

7 Trinôme second degré

Propriété 11 : Somme et produit des racines

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$
 Si ce polynôme admet deux racines x_1 et x_2 ,
 alors
$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Propriété 12 : Factorisation

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

- Si ce polynôme admet deux racines x_1 et x_2 ,
 alors
$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
- Si ce polynôme admet une racine double x_0 ,
 alors
$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

7.1 Signe du trinôme

7.2 Factorisation

Définition 7 : Racine

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
 α est racine de $P \iff P(\alpha) = 0$

Propriété 13 : Factorisation

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$
 α est racine de $P \iff P$ est factorisable par $(x - \alpha)$
 C'est-à-dire il existe un polynôme $Q(x)$ tel que
 $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

8 Inégalités

8.1 Fonctions monotones

Définition 8 : fonction croissante

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f est croissante sur I si et seulement si
 Pour tout $(x, y) \in I^2$,
 Si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$
 Avec les signes logiques :
 $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Les fonctions croissantes gardent les inégalités larges (mais pas les inégalités strictes).

Définition 9 : fonction strictement croissante

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f est croissante strictement sur I si et seulement si
 $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Propriété 14 : strict / large

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 Si f est strictement croissante sur I
 Alors f est croissante (au sens large) sur I

Remarques :

- La réciproque est fautive (sinon on l'aurait dit) : une fonction croissante n'est pas nécessairement strictement croissante.

En particulier, une fonction constante est croissante (et décroissante) mais ni strictement croissante, ni strictement décroissante)

- Conséquence : une fonction strictement croissante conserve donc les inégalités strictes, mais aussi les inégalités **larges**.

Exemple : la fonction carrée $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\forall (a, b) \in [0, +\infty[$ (positifs)

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

Et $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

Définition 10 : fonction décroissante

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$(\text{resp. } \forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

Une fonction décroissante inverse les inégalités.

Question : a-t-on l'équivalence ? (Ce qui est important quand on doit résoudre une inéquation).

Cela marche pour les fonctions strictement monotones, mais pas pour les fonctions monotones (au sens large) :

Propriété 15 : fonctions strictement monotones

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- Si f est strictement croissante sur I

Alors $\forall (x, y) \in I^2,$

$$x < y \iff f(x) < f(y)$$

$$\text{et } x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

- Si f est strictement décroissante sur I

Alors $\forall (x, y) \in I^2,$

$$x < y \iff f(x) > f(y)$$

$$\text{et } x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

8.2 Exemple

Racine carrée :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 < 8$

$$x^2 < 8$$

$\iff \sqrt{x^2} < \sqrt{8}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\iff |x| < 2\sqrt{2} \quad (\text{Ne pas oublier la valeur absolue})$$

$$\iff -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

$$S =]-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}[$$