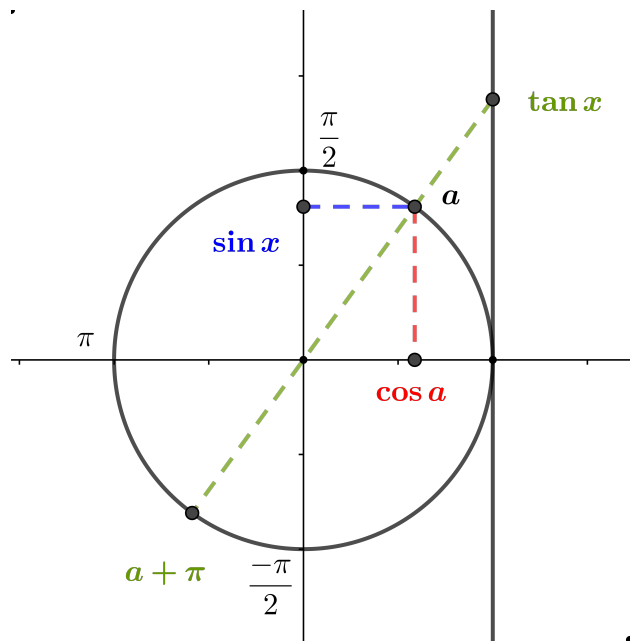


1 Lignes trigonométriques

Remarque préliminaire : tout angle géométrique admet une infinité de mesure

Si x est une mesure d'un angle, alors les mesures de cet angle sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



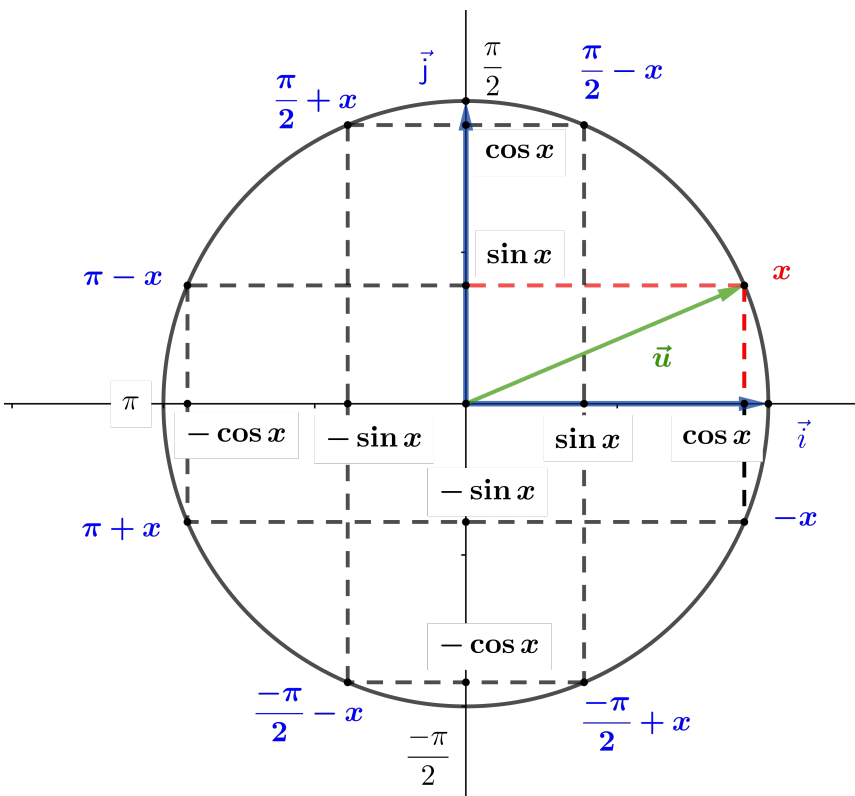
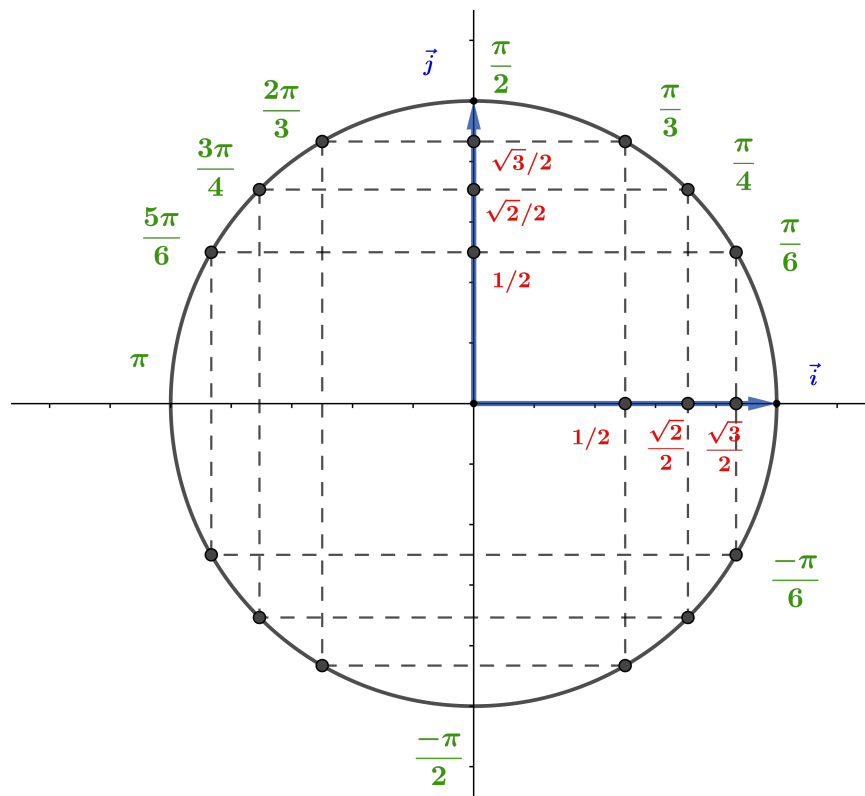
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2 Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

3 familles :

- $\pi/2$: 0, $\pm\pi/2$, $\pm\pi$
 $\cos$ et $\sin$ en : 0 et ± 1
 $\tan$ en : 0 ou non définie
- $\pi/4$: $\pm\pi/4$, $\pm 3\pi/4$
 $\cos$ et $\sin$ en : $\pm\sqrt{2}/2$
 $\tan$ en : ± 1
- $\pi/6$: $\pm\pi/6$, $\pm\pi/3$
 $\cos$ et $\sin$ en : $+1/2$ et $\pm\sqrt{3}/2$
 $\tan$ en : $\pm\sqrt{3}$ ou $\pm 1/\sqrt{3}$

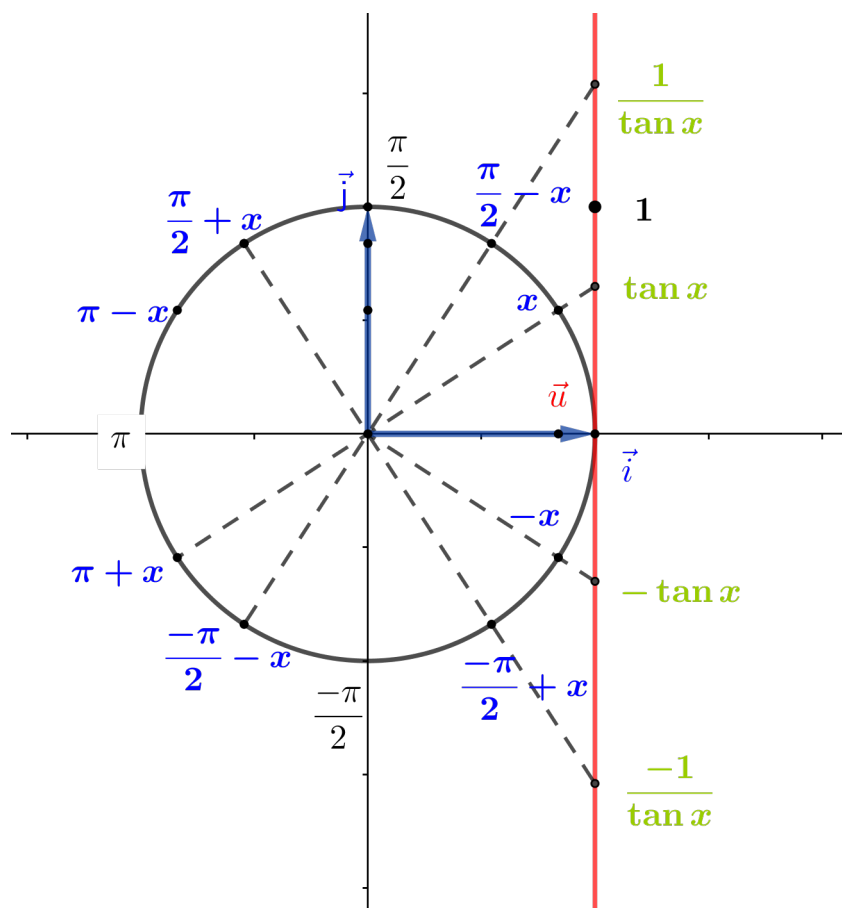


3 Angles associés

(Du type $\sin(\alpha \pm x)$ ou $\cos(\alpha \pm x)$ avec $\alpha \in \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}\}$)
Il faut savoir les retrouver en traçant le cercle trigonométrique :

α	$-x$	$\pi + x$	$\pi - x$
$\sin \alpha$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\cos \alpha$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\tan \alpha$	$-\tan x$	$\tan x$	$-\tan x$

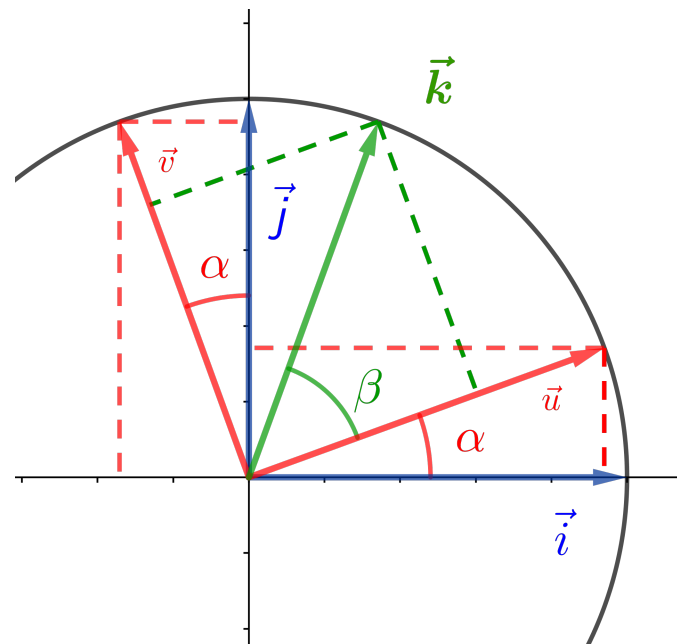
α	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\frac{-\pi}{2} - x$	$\frac{-\pi}{2} + x$
$\sin \alpha$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\cos \alpha$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$



Formules magiques : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Elles transforment un sinus en cosinus et inversement.

4 Formules d'addition



Propriété 1 : Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Démonstration $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

- l'angle $(\vec{i}, \vec{u}) = \alpha$

Donc $\vec{u} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$

De même $\vec{v} = -\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j}$

- On a l'angle $(\vec{i}, \vec{k}) = \alpha + \beta$

Donc $\vec{k} = \cos(\alpha + \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j}$ (1)

- D'autre part, on a l'angle $(\vec{u}, \vec{k}) = \beta$.

D'où $\vec{k} = \cos \beta \cdot \vec{u} + \sin \beta \cdot \vec{v}$

On remplace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par les valeurs précédentes :

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}) + \sin \beta \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j}) \\ &= \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} - \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{i} + \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \vec{j} \\ &= (\cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha) \vec{i} + (\cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha) \vec{j}\end{aligned}$$

- Par identification avec la formule (1), on obtient :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

On obtient ensuite $\sin(a-b)$ en écrivant

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \dots,$$

Démo de $\tan(a+b)$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\end{aligned}$$

De même :

$$\tan(a-b) = \tan(a+(-b)) = \dots$$

Propriété 2 : Formules de duplication

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \bullet \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \bullet \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{array} \right.$$

D'où les expressions de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

5 Linéarisation (produit $\rightarrow$ somme)

Elle découlent des formules d'addition

Propriété 3 : Formules de linéarisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \bullet \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \bullet \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \end{array} \right.$$

6 Formules de factorisation (somme $\rightarrow$ produit)

Elle se retrouvent avec les précédentes en posant :

$$\begin{cases} p = a + b \\ q = a - b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

(Moyen mnémotechnique : « SI CO CO SI CO CO -SI SI »)

Propriété 4 : Factorisation

$$\begin{aligned} \bullet \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \bullet \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \bullet \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \bullet \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

7 Compléments sur la tangente

Formule magique

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Propriété 5 : La fonction tangente

- La fonction tangente est définie pour $\cos x \neq 0$
Donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
- La fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition
 $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\tan(x + \pi) = \tan x$ donc la fonction tangente est π -périodique.
- $\tan(-x) = -\tan x$ donc la fonction tangente est impaire.

8 Équations trigonométriques

- $\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi$
- $\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi$
- $\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$

