

Exercice 1 Puissances

- Déterminer n tel que : $A = \frac{\frac{64}{4^5}}{\frac{2^{-5}}{(2^{-2})^4}} = 2^n$
- Déterminer n et p tels que : $\frac{\sqrt{6^3}}{12^4} = 2^n 3^p$
- Déterminer pour chaque expression a et q tels que : $u_n = a \times q^n$
 - $u_n = 2^{3n-1}$
 - $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
 - $u_n = \left(\frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}}\right)^3$
 - $u_n = \sqrt{3^{3n-1}}$
 - $u_n = \frac{12^{2n}}{25^{-n+2}} \times (\sqrt{15})^{-3n}$

Exercice 2 Démontrer par récurrence :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

(On n'utilisera pas les congruences mais la définition :

x est divisible par 7 ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 7n$)

- On définit la suite u par $u_0 = 8$ $u_1 = 1$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

Montrer que $u_n = 3 \cdot 2^n + 5(-1)^n$ pour $n \geq 0$

- Montrer que pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$ (*)

Exercice 3

- Mq $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$
- Mq $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$

On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \lfloor nx \rfloor$ (E)

- Déterminer $f_n(x+1)$ en fonction de $f_n(x)$
- Déterminer de même $f_n(x + \frac{1}{n})$ en fonction de $f_n(x)$
- Montrer que l'égalité (E) est vérifié pour tout $x \in [0, 1/n[$
- En déduire qu'elle est vérifiée pour tout $x \in [0, 1[$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 1 Puissances

- Déterminer n tel que : $A = \frac{\frac{64}{4^5}}{\frac{2^{-5}}{(2^{-2})^4}} = 2^n$
- Déterminer n et p tels que : $\frac{\sqrt{6^3}}{12^4} = 2^n 3^p$
- Déterminer pour chaque expression a et q tels que : $u_n = a \times q^n$
 - $u_n = 2^{3n-1}$
 - $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
 - $u_n = \left(\frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}}\right)^3$
 - $u_n = \sqrt{3^{3n-1}}$
 - $u_n = \frac{12^{2n}}{25^{-n+2}} \times (\sqrt{15})^{-3n}$

Exercice 2 Démontrer par récurrence :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

(On n'utilisera pas les congruences mais la définition :

x est divisible par 7 ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 7n$)

- On définit la suite u par $u_0 = 8$ $u_1 = 1$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

Montrer que $u_n = 3 \cdot 2^n + 5(-1)^n$ pour $n \geq 0$

- Montrer que pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$ (*)

Exercice 3

- Mq $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$
- Mq $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$

On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \lfloor nx \rfloor$ (E)

- Déterminer $f_n(x+1)$ en fonction de $f_n(x)$
- Déterminer de même $f_n(x + \frac{1}{n})$ en fonction de $f_n(x)$
- Montrer que l'égalité (E) est vérifié pour tout $x \in [0, 1/n[$
- En déduire qu'elle est vérifiée pour tout $x \in [0, 1[$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$