

Exercice 1 Développer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=1}^5 i^2$ b) $\sum_{i=3}^7 2^i$ c) $\sum_{i=1}^n i^3$ e) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i,j}$

d) $S_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i}$ $S_1 = ?$ $S_2 = ?$ $S_3 = ?$

f) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i a_{i,j}$ g) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 a_{i,j}$ h) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^{i+3} a_{i,j}$

Exercice 2

1) $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, avec $n \geq 1$

Donner sous forme développée S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

2) $T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \geq 0$

Donner sous forme développée $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$.

3) $V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$, $n \geq 1$

Donner sous forme développée : V_1, V_2, V_3, V_4, V_5

4) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n , T_{n+1} en fonction de T_n , V_{n+1} en fonction de V_n

5) $S'_1 = 1$ $S'_2 = 1 - \frac{1}{2}$ $S'_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $S'_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

Ecrire S'_5 et ensuite donner une expression développée de S'_n .

Exprimer S'_{n+1} en fonction de S'_n .

6) $T'_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ $T'_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9}$ $T'_3 = \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} + \frac{6}{13}$

Ecrire T'_4 et ensuite donner une expression développée de T'_n .

Exprimer T'_{n+1} en fonction de T'_n .

7) Exprimer avec le symbole Σ : $S_n, T_n, V_n, S'_n, T'_n$

Exercice 3

a) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k$

b) Démontrer les formules suivantes pour $n \geq 1$

$$T_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 4

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $(u_{i,j})$ une suite de réels positifs. Permuter les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p u_{i,j}$ b) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i u_{i,j}$ c**) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^p u_{i,j}$ (avec $n \leq p$)

Exercice 5 (Changements d'indices) En changeant d'indices calculer

$$A = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 \quad B = \sum_{k=1}^n (k-1)^3 \quad C = \sum_{k=1}^n (n+1-k)^3$$

Exercice 6 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. $\sum_{k=1}^n (k+1)^2$ 2. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ 3. $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$

4. $\sum_{k=2}^{2n} (n^2 + 3n - 1)$ 5. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} ij$ 6. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$

7. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (i+j)$ 8. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$ pour $n \geq 2$

9. $\sum_{i=n}^{2n} 2^i$ 10. $\sum_{k=0}^n \exp(-ka)$ 11. $\prod_{k=1}^n a^k$

12. La somme des carrés des n premiers nombres impairs.

Exercice 7 On pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $k \geq 1$

a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ pour tout $k \geq 1$

b) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$