

Exercice 2

Démontrer par récurrence :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

(On n'utilisera pas les congruences mais la définition :

x est divisible par 7 ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 7n$)

Dans une démonstration par récurrence simple, il faut qu'apparaisse la structure suivante :

Démontrons par récurrence sur ... que « »

- Initialisation : pour $n = \dots$

...[...]

Vrai pour $n = \dots$

- Hérédité : Supposons la propriété/formule/relation vraie à un rang $n \geq \dots$ donné

On a alors : (HR)

[...]

La relation est vraie au rang $n + 1$

- Conclusion : La propriété/formule/relation est vraie pour tout $n \geq \dots$

Allons-y!

Démontrons par récurrence sur n que

Pour tout $n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

- Initialisation : pour $n = 0$

$$3^{2n} - 2^n = 3^0 - 2^0 = 0 \text{ qui est divisible par 7}$$

Vrai pour $n = 0$

- Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$ donné

On a alors : $3^{2n} - 2^n$ divisible par 7

CAd : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$

$$\Rightarrow 3^{2n} = 7k + 2^n \quad \text{(HR)}$$

(Montrons que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7)

Or

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n} \cdot 3^2 - 2^n \cdot 2 \\ &= (7k + 2^n)3^2 - 2^n \cdot 2 \quad \text{(HR)} \\ &= 7k \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 7 \times 9k + 7 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 7(9k + 2^n) \\ &= 7k' \quad \text{avec} \quad k' = 9k + 2^n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

La relation est vraie au rang $n + 1$

- Conclusion : La propriété/formule/relation est vraie pour tout $n \geq \dots$

- 2) On définit la suite u par $u_0 = 8 \quad u_1 = 1$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

Montrer que $u_n = 3 \cdot 2^n + 5(-1)^n$ pour $n \geq 0$

- 3) Montrer que pour $n \geq 5, 2^n > n^2$ (*)