

1 Suites particulières

1.1 suites arithmétiques

Définition 1 : Suite arithmétique (Relation de récurrence)

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété 1 : Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r Alors

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_p = u_n + r(p - n)$$

Propriété 2 : Suites arithmétiques (Forme générale)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si

il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + r.n$

Propriété 3 : Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit une suite (u_n) une suite arithmétique

Alors
$$\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des extrêmes)

Démonstration (en utilisant $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$)

Soit u_n une suite arithmétique de raison r

Alors, pour $n \in \mathbb{N}, u_k = u_0 + k.r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=p}^n u_k &= \sum_{k=p}^n (u_0 + k.r) \\ &= \sum_{k=p}^n u_0 + r \cdot \sum_{k=p}^n k \\ &= (n - p + 1)u_0 + r \cdot \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{p-1} k \right) \end{aligned}$$

$$= (n - p + 1)u_0 + r \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} \right)$$

$$= (n - p + 1)u_0 + \frac{r}{2}(n^2 - p^2 + n + p)$$

$$= (n - p + 1)u_0 + \frac{r}{2}((n+p)(n-p) + n + p)$$

$$= (n - p + 1)u_0 + \frac{r}{2}(n+p)(n-p+1)$$

$$= (n - p + 1) \frac{1}{2}(2u_0 + r(n+p))$$

$$= (n - p + 1) \frac{1}{2}((u_0 + r.n) + (u_0 + p.r))$$

$$= (n - p + 1) \frac{1}{2}(u_n + u_p)$$

fin demo

$$\bullet \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n k = (n - p + 1) \frac{n+p}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n (2k+1) = (n - p + 1) \frac{(2p+1) + (2n+1)}{2} = (n - p + 1)(p + n + 1)$$

1.2 suites géométriques

Définition 2 : Suite géométrique (Relation de récurrence)

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$$

Propriété 4 : Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

Alors $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_p = q^{p-n}.u_n$

Propriété 5 : Suites géométriques (forme générale)

Une suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si
il existe $(a, q) \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \cdot q^n$

Somme des termes d'une suite géométrique (raison $q \neq 1$)

$$\begin{aligned} &= (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nb termes})}}{1 - \text{raison}} \\ &= \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme}) - (1^{\text{er}} \text{ terme qui n'y est pas})}{1 - \text{raison}} \end{aligned}$$

Propriété 6 : Somme des termes d'une suite géométrique (forme générale)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque

$$u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{pour } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{pour } q = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} & \text{pour } q \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{pour } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Posons $S = \sum_{k=p}^n u_k$

$$\begin{aligned} (1 - q)S &= \sum_{k=p}^n u_k - q \sum_{k=p}^n u_k \\ &= \sum_{k=p}^n (1 - q)u_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=p}^n (u_k - q \cdot u_k) \\ &= \sum_{k=p}^n (u_k - u_{k+1}) \\ &= u_{p+1} - u_n \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q} \quad \text{car } q \neq 1 \Rightarrow 1 - q \neq 0 \\ &= \frac{u_p - q^{n-p+1}u_p}{1 - q} \\ &= u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

fin demo

1.3 Autres formules

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Remarque : ces sommes peuvent aussi commencer à 0 car le terme de rang 0 est nul :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2 Propriétés des sommes**Définition 3 : Somme**

On peut définir les sommes par la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } p \geq n, \quad \sum_{k=n}^{p+1} a_k = a_{p+1} + \sum_{k=n}^p a_k$$

et l'initialisation : $\sum_{k=n}^n a_k = a_n$

Propriété 7 : LinéaritéPour $n \leq p$

$$\left\| \begin{aligned} &\bullet \sum_{k=n}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p b_k \\ &\bullet \sum_{k=n}^p (\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=n}^p a_k \\ &\bullet \sum_{k=n}^p C = (p - n + 1) \cdot C \quad \text{où } C \text{ est indépendant de l'indice } k \end{aligned} \right\|$$

Propriété 8 : Produit et factorisation

$$\left\| \begin{aligned} &\left(\sum_{k=n}^p a_k \right) \left(\sum_{k=q}^r b_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=n}^p a_k \right) \left(\sum_{j=q}^r b_j \right) \quad \text{changement d'indice indispensable!} \\ &= \sum_{k=n}^p \sum_{j=q}^r a_k \cdot b_j \\ &= \sum_{\substack{n \leq k \leq p \\ q \leq j \leq r}} a_k \cdot b_j \end{aligned} \right\|$$

Carré d'une somme

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$$

Propriété 9 : Carré d'une somme

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^p a_k \right)^2 = \sum_{\substack{n \leq i \leq p \\ n \leq j \leq p}} a_i \cdot b_j = \sum_{k=n}^p a_k^2 + 2 \sum_{n \leq i < j \leq p} a_i a_j \right\|$$

C'est « la somme des carrés plus les doubles produits »

Propriété 10 : Inégalité triangulaire généralisée

$$\left\| \left| \sum_{k=n}^p a_k \right| \leq \sum_{k=n}^p |a_k| \right\|$$

Propriété 11 : Télescopage

$$\left\| \sum_{k=n}^p (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_n \right\|$$

Démonstration

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=n}^p (a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=n}^p a_{k+1} - \sum_{k=n}^p a_k \end{aligned}$$

Changement d'indice sur la première sommes : $j = k + 1 \quad \begin{cases} k = p & j = p + 1 \\ k = p & j = p + 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=n+1}^{p+1} a_j - \sum_{k=n}^p a_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{p+1} a_k - \sum_{k=n}^p a_k \quad (\text{re-changement d'indice trivial pour avoir le même} \\ &\text{nom}) \end{aligned}$$

Les entiers communs aux deux sommes sont : $[[n + 1, p]]$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=n+1}^p a_k + a_{p+1} \right) - \left(\sum_{k=n+1}^p a_k + a_n \right) \\ &= a_{p+1} - a_n \end{aligned}$$

*fin demo***Exemple : simplifier**

$$\bullet S_n = \sum_{i=n}^{2n} (u_{i-1} - u_i)$$

$$\bullet T_{q,p} = \sum_{n=q+1}^{p+2} (v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n)$$

$$\bullet T_{q,p} = \sum_{k=n}^{2n+1} (u_{n+2} - u_n)$$

Propriété 12 : Sommes tronquées (troncature)

Pour $0 < n < p$

$$\sum_{k=n}^p a_k = \sum_{k=0}^p a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^p a_k = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k$$

Changements d'indices

Deux types de changements possibles : $k' = k + c, \quad k' = -k + c$

où c est un entier **indépendant de l'indice**

Par exemple : $k' = k + 1 \quad k' = n - k$

Changements **interdits** du style : $k' = 2k, k' = 2k + 1, \dots$

Exemple 1 : $S_n = \sum_{k=0}^n (n - k + 1)^3$

On pose $j = n - k + 1 \iff k = n - j + 1$ bornes : $\begin{cases} k = n & j = 1 \\ k = 0 & j = n + 1 \end{cases}$

$$T_n = \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Exemple 2 : $T_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2$

On pose $k = j + n \iff j = k - n$ bornes : $\begin{cases} k = 2n & j = n \\ k = n & j = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{j=0}^n (j+n)^2 = \sum_{j=0}^n (j^2 + 2jn + n^2) \\ &= \sum_{j=0}^n j^2 + 2n \sum_{j=0}^n j + \sum_{j=0}^n n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n+1)n^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [(2n+1) + 12n] \\ &= \frac{n(n+1)(14n+1)}{6} \end{aligned}$$

Vérif :

pour $n = 1$ $S_1 = 1 + 4 = 5$ $\frac{n(n+1)(14n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 15}{6} = 5$

pour $n = 2$ $S_2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $\frac{n(n+1)(14n+1)}{6} = \frac{2 \times 3 \times 29}{6} = 29$

Remarque : on peut aussi le faire par troncature

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=n}^{2n} k^2 = \sum_{k=0}^{2n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n}{6} [2(2n+1)(4n+1) - (n-1)(2n-1)] \\ &= \frac{n}{6} [2(8n^2 + 6n + 1) - (2n^2 - 3n + 1)] \\ &= \frac{n}{6} [14n^2 + 15n + 1] \quad -1 \text{ racine évidente : on factorise par } n+1 \\ &= \frac{n}{6} [(n+1)(14n+1)] \end{aligned}$$

Exemple

$$\bullet S_n = \sum_{k=2}^n (2k-1)u_{k-1}$$

Effectuer le changement d'indice : $j = k - 1$

$$\bullet S_n = \sum_{j=0}^n (n-j+1)u_{2k+1}$$

Effectuer le changement d'indice : $k = n - j + 1$

Permutation des sommes doubles

• **Indices indépendants** : pas de problèmes.

$$\sum_{j=n}^p \sum_{k=q}^r a_{j,k} = \sum_{\substack{n \leq j \leq p \\ q \leq k \leq r}} a_{j,k} = \sum_{k=q}^r \sum_{j=n}^p a_{j,k}$$

- Indices liés : **Exemple 1** : $\sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k}$

On remarque que l'indice k (qui arrive dans la deuxième somme dépend de l'indice j de la première somme. On ne peut donc pas permuter directement les deux sommes.

Détaillons la procédure : il s'agit d'abord de réunir les conditions sur les indices en une seule série d'inégalité, puis de les séparer à nouveau en commençant par le premier indice que l'ont veut, ici k

§ Étape 1 :
$$S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k}$$

On exprime le parcours des indices sous forme d'inégalités : j va de 0 à n donc $0 \leq j \leq n$ et k va de j à n donc $j \leq k \leq n$ D'où

$$S = \sum_{0 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} a_{j,k}$$

On regroupe tout sous une seule somme :

$$S = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n}} a_{j,k}$$

§ Étape 2 : il s'agit maintenant de réunir les lignes d'inégalités en une seule équivalence. Or on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{array} \right\} \iff 0 \leq j \leq k \leq n$$

A de stade, il est essentiel de **bien vérifier qu'il y a équivalence**, c'est-à-dire que « ca marche dans les deux sens ». Je peux passer de la partie gauche à la partie droite et aussi de la partie droite à la partie gauche.

$$S = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k}$$

§ Étape 3 : on va maintenant vers l'inverse, on va « défusionner », en commençant par l'indice k

Celui ne peut pas dépendre de j (qui ne viendra qu'après). Donc $0 \leq k \leq n$
Ensuite, une fois que k est choisi, on aura : $0 \leq j \leq k$ D'où

$$0 \leq j \leq k \leq n \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k \end{array} \right.$$

Donc
$$S = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} a_{j,k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq j \leq k} a_{j,k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{j,k}$$

On peut résumer tout le processus ainsi :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n}} a_{j,k} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} a_{j,k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{j,k}$$

- Indices liés, **exemple 2** : $S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k}$

$$S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j+1 \leq k \leq n+1}} a_{j,k}$$

Petit problème ici : on a l'indice j qui apparaît sous deux formes j et $j+1$. On va donc transformer la deuxième ligne en soustrayant 1 :

$$S = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k-1 \leq n}} a_{j,k}$$

On peut maintenant fusionner :

$$= \sum_{0 \leq j \leq k-1 \leq n} a_{j,k}$$

Et défusionner en commençant par k

$$= \sum_{\substack{0 \leq k-1 \leq n \\ 0 \leq j \leq k-1}} a_{j,k}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n+1} \sum_{0 \leq j \leq k-1} a_{j,k}$$

$$\text{car } 0 \leq k-1 \leq n \iff 1 \leq k \leq n+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}$$

On peut résumer ainsi les calculs :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j+1 \leq k \leq n+1}} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k-1 \leq n}} a_{j,k}$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq k-1 \leq n} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq k-1 \leq n \\ 0 \leq j \leq k-1}} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}$$

5 Produits

Exemples : Développer :

$$\begin{aligned} \bullet P_1 &= \prod_{k=1}^5 (2k+1) \\ \bullet P_q &= \prod_{n=1}^{q+1} \frac{1}{n^2+1} \end{aligned}$$

Définition 6 : Produit

On peut définir les sommes par la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } n \geq p, \quad \prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1} \times \prod_{k=p}^n a_k$$

$$\text{et l'initialisation : } \prod_{k=p}^p a_k = a_p$$

Propriété 15

$$\begin{aligned} \bullet \prod_{k=n}^p C &= C^{p-n+1} \\ \bullet \prod_{k=n}^p (a_k \times b_k) &= \prod_{k=n}^p a_k \times \prod_{k=n}^p b_k \\ \bullet \prod_{k=n}^p (\lambda \cdot a_k) &= \lambda^{p-n+1} \times \prod_{k=n}^p a_k \end{aligned}$$

Propriété 16 : Télescopage

$$\begin{aligned} \text{Si } \forall k \in [[n,p]], a_k \neq 0 \\ \prod_{k=n}^p \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{a_{p+1}}{a_n} \end{aligned}$$

Propriété 17 : Somme et produit

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } \forall k \in [[n,p]], a_k > 0 \\ \ln \left(\prod_{k=n}^p a_k \right) &= \sum_{k=n}^p \ln(a_k) \\ \bullet \text{ Si } \forall k \in [[n,p]], a_k \in \mathbb{R} \\ \prod_{k=n}^p \exp(a_k) &= \exp \left(\sum_{k=n}^p a_k \right) \end{aligned}$$

6 Factorielle

Définition 7 : Factorielle (par récurrence)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Initialisation : } 0! &= 1 \\ \bullet \text{ Relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! &= (n+1) \times n! \end{aligned}$$

Propriété 18 : Factorielle et produit

$$\text{On a aussi : pour } n \geq 1, n! = \prod_{k=1}^n k$$

Propriété 19 : Deux formules intéressantes

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \geq 1 \\ \bullet 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) &= \prod_{k=1}^n (2k) = \prod_{k=1}^n 2 \prod_{k=1}^n k = 2^n \cdot n! \\ \bullet 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) &= \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

3 Coefficients binomiaux

Définition 4 : coefficient binomial

$$\text{Pour } 0 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$\text{Convention : pour } 0 \leq n < k, \binom{n}{k} = 0$$

Propriété 8

$$\begin{aligned} & \bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\ & \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ & \bullet \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ & \bullet \text{Symétrie : Pour } 0 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ & \bullet \text{Pour } 1 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Propriété 9 : Formule de Pascal

$$\text{Pour } 1 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & \bullet \text{Symétrie : } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} \\ & \bullet \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\ & \quad = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \\ & \bullet \text{Formule de Pascal :} \\ & \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ & \quad = \frac{n! k}{(n-k+1)! (k-1)!k} + \frac{(n-k+1) n!}{(n-k+1)(n-k)! k!} \\ & \quad = \frac{n! k}{(n-k+1)! k!} + \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)! k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{n! (k + (n-k+1))}{(n-k+1)! k!} \\ & = \frac{n! (n+1)}{(n-k+1)! k!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)! k!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

fin demo

La formule de Pascal permet de construire le triangle éponyme donnant $\binom{n}{p}$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

4 Binôme de Newton

Propriété 10 : Binôme de Newton

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration Montrons que pour tout $n \geq 0$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Par récurrence sur n .

• Initialisation :

Pour $n = 0$

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

• Hérité : supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$ donné

$$\text{On a } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
 &= (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
 &= a \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Faisons un changement d'indice dans la première somme :

$$k' = k + 1 \iff k = k' - 1, \quad \text{bornes : } \begin{cases} k = n & k' = n + 1 \\ k = 0 & k' = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'}$$

Ce qui donne, en remplaçant k' par k :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On met à part les termes qui « dépassent » pour que les indices parcourent le même ensemble : $[[1, n]]$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\
 &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}
 \end{aligned}$$

On peut maintenant regrouper les deux sommes et utiliser la formule de Pascal :

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

$$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

On constate que,

- pour $k = 0$, $\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} = b^{n+1}$
- pour $k = n+1$, $\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} = a^{n+1}$

On peut donc faire rentrer les deux termes restants dans la somme :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien la formule de Newton

La deuxième formule : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ s'obtient par changement d'indice :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On pose $j = n - k \iff k = n - j$ Bornes : $\begin{cases} k = n & j = 0 \\ j = 0 & j = n \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} a^{n-j} b^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \quad \text{en utilisant la formule de symétrie du binôme} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
 \end{aligned}$$

CQFD

fin demo

Propriété 11 : Exemples

$$\left\| \begin{aligned}
 &\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \\
 &\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (1+x)^n
 \end{aligned} \right.$$

5 Identités remarquables

Attention :

ces formules n'ont RIEN à voir avec le binôme de Newton

• Factorisation par $a - b$

Cela ne marche que si l'expression s'annule pour $b = a$

Exemples : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Cela se généralise de la façon suivante :

Propriété 12

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + a^{n-1}b^k + \dots + b^n) \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

• Factorisation par $a + b$

Cela ne marche que si l'expression s'annule pour $b = -a$

• Pour $n = 2p$ pair

Par exemple :

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$$

Ce qui se généralise :

Propriété 13

$$\begin{aligned} a^{2p} - b^{2p} &= (a + b)(a^{2p-1} - a^{2p-2}b + \dots + (-1)^k a^{2p-1-k} b^k + \dots - b^{2p-1}) \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k a^{2p-1-k} b^k \end{aligned}$$

• Pour $n = 2p + 1$ impair

Exemples :

$$a^3 + b^3 = \dots\dots\dots$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

Ce qui se généralise :

Propriété 14

$$\begin{aligned} a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a + b)(a^{2p} - a^{2p-1}b + \dots + (-1)^k a^{2p-k} b^k + \dots + b^{2p}) \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k} b^k \end{aligned}$$

Remarques :

- $a^{2n} - b^{2n}$ est factorisable par $a - b$ et par $a + b$ c'est-à-dire par $a^2 - b^2$ ce qui est clair si on pose $A = a^2$, $B = b^2$:

$$a^{2n} - b^{2n} = A^n - B^n = (A - B)(\dots) = (a^2 - b^2)(\dots)$$

- $a^{2n} + b^{2n}$ n'est factorisable ni par $a + b$ ni par $a - b$