

1 Nombres complexes

Définition 1 : nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous **forme algébrique** $z = a + b.i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre tel que $i^2 = -1$

a est appelé la **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire** ;

On note : $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors z est réel
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note

$$z \in i.\mathbb{R}$$

Propriété 1 : Égalité

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

Propriété 2 : Parties réelles, imaginaires

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$\operatorname{Re}(a.z_1 + b.z_2) = a.\operatorname{Re}(z_1) + b.\operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(a.z_1 + b.z_2) = a.\operatorname{Im}(z_1) + b.\operatorname{Im}(z_2)$$

En particulier

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

Attention : ça ne marche pas pour le produit complexe :

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Re}(z_1) . \operatorname{Re}(z_2)$$

Définition 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

Soit $z = a + b.i$ un nombre complexe.

- On dit qu'un point M du plan a pour affixe z s'il a pour coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On note alors $M(z)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe s s'il a pour coordonnées (a, b) dans le même repère c'est-à-dire : $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$
On note $\vec{u}(z)$

Interprétation géométrique : somme, produit par un réel.

2 Conjugué

Définition 3 : Conjugué

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = \overline{a + i.b} = a - i.b$$

Interprétation géométrique

Propriété 3 : Compatibilité avec les opérations

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$\bullet \quad \overline{\bar{z}} = z \quad \overline{a.z + b.z'} = a.\bar{z} + b.\bar{z}'$$

$$\bullet \quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}' \quad \text{Pour } z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\bullet \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Propriété 4 : parties imaginaires, réelles

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \\ z \in i.\mathbb{R} \iff z = -\bar{z} \end{array} \right.$$

3 Module

Définition 4 : Module

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Propriété 5

$$\text{Pour } (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a + i.b| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété 6 : Interprétation géométrique

$$\text{Si } M(z), \text{ alors } |z| = OM$$

$$\text{Si } \vec{u}(z) \text{ alors } |z| = \|\vec{u}\|$$

$$\text{Si } A(a) \text{ et } B(b) \text{ alors } |b - a| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Propriété 7 : compatibilité avec les opérations

$$\left\| \begin{array}{l} z = 0 \iff |z| = 0 \\ |\bar{z}| = |z| \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n \end{array} \right.$$

Attention : marche pas bien avec somme et différence

Propriété 8 : Inverse

$$\left\| \text{Si } z \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right.$$

Propriété 9 : Double inégalité triangulaire

$$\left\| \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad | |z| - |z'| | \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \right.$$

Propriété 10 : Cas d'égalité

$$\left\| \begin{array}{l} |z + z'| = |z| + |z'| \\ \iff z' = 0 \text{ ou } z' = \alpha \cdot z \text{ avec } \alpha \text{ réel positif} \end{array} \right.$$

Interprétation géométrique

4 Nombre complexes de module 1

Définition 5 : ensemble des complexe de module 1

$$\left\| \text{On note } \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \right.$$

Propriété 11 : Angle

$$\left\| \begin{array}{l} \text{A tout point du cercle } \mathbb{U} \text{ correspond un angle } \theta, \text{ défini modulo } 2\pi, \\ \text{tel que } M(\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

Propriété 12 : Argument

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Tout nombre complexe de } \mathbb{U} \text{ s'écrit } z = \cos(\theta) + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \\ \text{où } \theta \text{ est appelé un argument de } z \text{ et est noté } \arg(z) \end{array} \right.$$

Définition 6 : notation exponentielle

$$\left\| \text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on note } e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta) \right.$$

Propriété 13 opérations

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet e^{\mathbf{i} \cdot 0} = 1 \quad e^{\mathbf{i} \cdot \pi} = -1 \quad e^{\mathbf{i} \cdot \pi/2} = \mathbf{i} \\ \bullet \overline{e^{\mathbf{i}\theta}} = e^{-\mathbf{i}\theta} \quad |e^{\mathbf{i}\theta}| = 1 \\ \bullet e^{\mathbf{i}(\theta_1 + \theta_2)} = e^{\mathbf{i}\theta_1} e^{\mathbf{i}\theta_2} \quad e^{-\mathbf{i}\theta} = \frac{1}{e^{\mathbf{i}\theta}} \\ e^{\mathbf{i}(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{e^{\mathbf{i}\theta_1}}{e^{\mathbf{i}\theta_2}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, e^{\mathbf{i}n\theta} = [e^{\mathbf{i}\theta}]^n \end{array} \right.$$

4.1 Formules d'Euler

Propriété 14

$$\left\| \cos(x) = \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}} \right.$$

ou encore

Propriété 15

$$\left\| \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{\mathbf{i}x}) \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{\mathbf{i}x}) \right.$$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad e^{\mathbf{i}a} + e^{\mathbf{i}b} \quad 1 - e^{-\mathbf{i}a} \quad \text{etc.}$
- Linéarisation : $\cos^3 x \cdot \sin x$

4.2 Formule de Moivre

Propriété 16

$$\left\| (\cos \theta + \mathbf{i} \cdot \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i} \cdot \sin(n\theta) \right.$$

Application : Calcul de $\cos(3x), \sin(3x)$ en fonction $\sin x, \cos x$