

1 Nombres complexes

Définition 1 : nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous **forme algébrique** $z = a + b.i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre tel que $i^2 = -1$

a est appelé la **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire**;

On note : $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors z est réel
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note

$$z \in i.\mathbb{R}$$

Propriété 1 : Égalité

$$\| z_1 = z_2 \iff \dots \dots \dots$$

Propriété 2 : Parties réelles, imaginaires

$$\left\| \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \\ \operatorname{Re}(a.z_1 + b.z_2) = \dots \dots \dots \\ \operatorname{Im}(a.z_1 + b.z_2) = \dots \dots \dots \\ \text{En particulier} \\ \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \dots \dots \dots \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Attention : ça ne marche pas pour le produit complexe :

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$$

Définition 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

Soit $z = a + b.i$ un nombre complexe.

- On dit qu'un point M du plan a pour affixe z s'il a pour coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On note alors $M(z)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe s s'il a pour coordonnées (a, b) dans le même repère c'est-à-dire : $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$
On note $\vec{u}(z)$

Interprétation géométrique : somme, produit par un réel.

2 Conjugué

Définition 3 : Conjugué

$$\| \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = \overline{a + i.b} \dots \dots \dots$$

Interprétation géométrique

Propriété 3 : Compatibilité avec les opérations

$$\left\| \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \\ \overline{\bar{z}} = \dots \dots \dots \quad \overline{a.z + b.z'} = \\ \overline{z.z'} = \dots \dots \dots \quad \text{Pour } z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \dots \dots \dots \\ \text{pour } n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Propriété 4 : parties imaginaires, réelles

$$\left\| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z) = \dots \dots \dots \quad \operatorname{Im}(z) = \dots \dots \dots \\ z \in \mathbb{R} \iff \dots \dots \dots \\ z \in i.\mathbb{R} \iff \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

3 Module

Définition 4 : Module

$$\| |z| = \dots \dots \dots$$

Propriété 5

$$\| \text{Pour } (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a + i.b| = \dots \dots \dots$$

Propriété 6 : Interprétation géométrique

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } M(z), \text{ alors } |z| = \dots \dots \dots \\ \text{Si } \vec{u}(z) \text{ alors } |z| = \dots \dots \dots \\ \text{Si } A(a) \text{ et } B(b) \text{ alors } |b - a| = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Propriété 7 : compatibilité avec les opérations

$$\left\| \begin{array}{l} z = 0 \iff \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Attention : marche pas bien avec somme et différence

Propriété 8 : Inverse

$$\left\| \text{Si } z \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{z} = \dots \right.$$

Propriété 9 : Double inégalité triangulaire

$$\left\| \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \dots \right.$$

Propriété 10 : Cas d'égalité

$$\left\| \begin{array}{l} |z + z'| = |z| + |z'| \\ \iff \dots \end{array} \right.$$

Interprétation géométrique

4 Nombre complexes de module 1**Définition 5 : ensemble des complexe de module 1**

$$\left\| \text{On note } \mathbb{U} = \{ \dots \} \right.$$

Propriété 11 : Angle

$$\left\| \begin{array}{l} \text{A tout point du cercle } \mathbb{U} \text{ correspond un angle } \theta, \text{ défini modulo } 2\pi, \\ \text{tel que } M(\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

Propriété 12 : Argument

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Tout nombre complexe de } \mathbb{U} \text{ s'écrit } z = \cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta) \\ \text{où } \theta \text{ est appelé } \dots \text{ de } z \text{ et est noté } \dots \end{array} \right.$$

Définition 6 : notation exponentielle

$$\left\| \text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on note } e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta) \right.$$

Propriété 13 opérations

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet e^{\mathbf{i} \cdot 0} = \dots \quad e^{\mathbf{i} \cdot \pi} = \dots \quad e^{\mathbf{i} \cdot \pi/2} = \dots, \\ \bullet \overline{e^{\mathbf{i}\theta}} = \dots \quad |e^{\mathbf{i}\theta}| = \dots \\ \bullet e^{\mathbf{i}(\theta_1 + \theta_2)} = \dots \quad e^{-\mathbf{i}\theta} = \dots \\ e^{\mathbf{i}(\theta_1 - \theta_2)} = \dots \quad \forall n \in \mathbb{Z}, e^{\mathbf{i}n\theta} = \dots \end{array} \right.$$

4.1 Formules d'Euler**Propriété 14**

$$\left\| \cos(x) = \dots \quad \sin(x) = \dots \right.$$

ou encore

Propriété 15

$$\left\| \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{\mathbf{i}x}) \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{\mathbf{i}x}) \right.$$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad e^{\mathbf{i}a} + e^{\mathbf{i}b} \quad 1 - e^{-\mathbf{i}a} \quad \text{etc.}$
- Linéarisation : $\cos^3 x \cdot \sin x$

4.2 Formule de Moivre**Propriété 16**

$$\left\| (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta)^n = \dots \right.$$

Application : Calcul de $\cos(3x), \sin(3x)$ en fonction $\sin x, \cos x$

5 Argument

Propriété 17

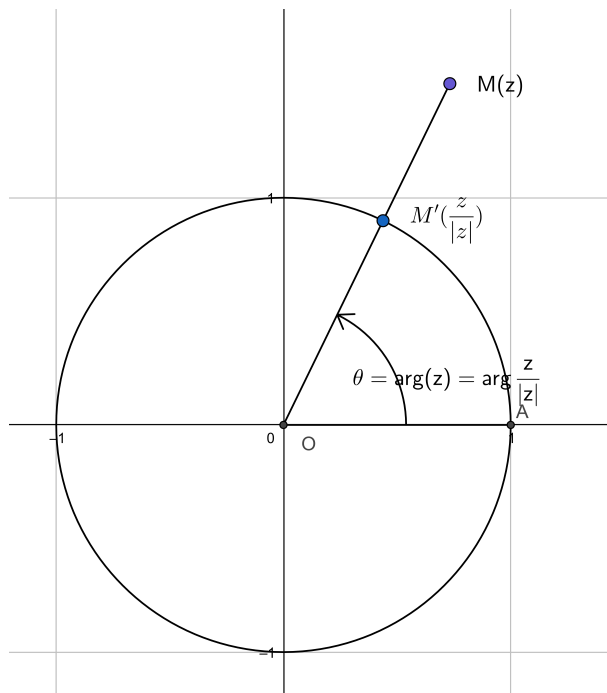
|| Soit $z \in \mathbb{C}^*$. alors $z/|z| \in \mathbb{U}$

Définition 7 : Argument

Soit $z \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = |z|e^{i\theta}$
 θ est appelé un argument de z et on note $\theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

Attention : un argument est toujours défini modulo 2π

Interprétation géométrique :



Exemples : donner les arguments des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i, z_2 = -3, z_3 = -\sqrt{3}i \quad z_4 = 1+i, z_5 = 1-i\sqrt{3}$$

Propriété 18 : Valeurs particulières

- a) $\arg(z) = 0 \quad [2\pi] \iff z \dots\dots\dots$
 b) $\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \iff z \dots\dots\dots$
 c) $\arg(z) = \pi \quad [\pi] \iff z \dots\dots\dots$
 d) z imaginaire pur $\dots\dots\dots$

Propriété 19 : opérations

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \dots\dots\dots$
 • $\arg(1/z) = \dots\dots\dots$
 • $\arg(z_1/z_2) = \dots\dots\dots$
 • $\arg(z^n) = \dots\dots\dots$
 • $\arg(\bar{z}) = \dots\dots\dots$
 • Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $\arg(a \cdot z) = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{si } \dots\dots\dots \end{cases}$

$\arg(-z) = ?$

Définition 8 : forme exponentielle

Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme exponentielle :
 $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

Propriété 20 : Égalité par module et argument

Soient z_1, z_2 deux complexes non nuls

$$z_1 = z_2 \iff \iff \begin{cases} |z_1| = \dots\dots\dots \\ \arg(z_1) = \dots\dots\dots \end{cases}$$

6 Exponentielle complexe

Définition 9 : Exponentielle complexe

- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{a+ib} = \dots = \dots$$

- Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \dots = \dots$$

Propriété 21 : Opérations

$$\left\| \begin{array}{lll} e^{z+z'} = e^z e^{z'} & e^{-z} = \frac{1}{e^z} & e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \quad e^{n \cdot z} = (e^z)^n, n \in \mathbb{Z} \\ \overline{e^z} = e^{\bar{z}} & |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} & \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Propriété 22 : Égalité

$$\left\| \begin{array}{l} e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = \dots \\ \iff z' - z = \dots \\ \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \dots \\ \operatorname{Im}(z) = \dots \end{cases} \end{array} \right.$$

Propriété 23 : Équation $e^z = a, a \in \mathbb{C}$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit l'équation } e^z = a \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C} \\ \bullet \text{ Si } a = 0, \dots \\ \bullet \text{ Si } a \neq 0, \dots \\ z = \dots \end{array} \right.$$

7 Géométrie

7.1 Interprétations géométriques

$$\bullet z(\overrightarrow{AB}) = \dots$$

$$\bullet |z_M| = \dots = \dots$$

$$\bullet |z_B - z_A| = \dots = \dots$$

$$\bullet \arg(z_u) = \dots$$

$$\bullet (\vec{u}, \vec{v}) = \dots = \dots = \dots$$

$$\bullet (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dots = \dots$$

7.2 propriétés géométriques (non exhaustives)

- Cercle de centre $A(z_A)$ et rayon $r > 0$:

$$M(z) \in C(A, r) \iff \dots$$

$$\iff \dots \iff \dots$$

- Colinéarité : Pour $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \dots$$

$$\iff \dots \iff \dots$$

$$\iff \dots$$

- Alignement : Pour A, B, C distincts,

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \dots$$

$$\iff \dots \iff \dots$$

- perpendicularité :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}, \vec{v}) = \dots$$

$$\iff \arg \dots \iff \frac{z_v}{z_u} \in \dots$$

$$\iff \dots$$

8 Second degré

8.1 Équation du second degré

Propriété 24 : Solutions des équations du second degré

Soit l'équation $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
 On note $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ le discriminant de cette équation

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double $z_0 = \dots\dots\dots$
 et $Q(z) = \dots\dots\dots$
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes
 $z_1 = \dots\dots\dots$ $z_2 = \dots\dots\dots$
 Et $Q(z) = \dots\dots\dots$

Propriété 25 : Produit et somme des racines

Si z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$
 (avec $z_1 = z_2$ dans le cas de la racine double),
 alors $P = z_1 z_2 = \dots\dots\dots$ $S = z_1 + z_2 = \dots\dots\dots$

Propriété 26 : Solutions des sommes et produits

Les solutions du système $\begin{cases} z_1 z_2 = p \\ z_1 + z_2 = s \end{cases}$ sont les couples (z_1, z_2)
 solutions de l'équation $\dots\dots\dots$

8.2 Racines carrées d'un complexe

Soit $z = a + \mathbf{i}.b$ On cherche $\delta = x + \mathbf{i}.y$ tel que $\delta^2 = z$

Exemples : Trouver les racines carrées de $2 + \mathbf{i}$ puis de $1 - 3\mathbf{i}$

9 Racines $n^{\text{èmes}}$

Définition 10 : Racines $n^{\text{ièmes}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z si et seulement si $\dots\dots\dots$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si et seulement si $\dots\dots\dots$

On notera $\dots\dots\dots$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Propriété 27 : Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont de la forme
 $z_k = \dots\dots\dots$ avec $k \in \dots\dots\dots$ (ou $k \in \dots\dots\dots$)
 On a donc $\mathbb{U}_n = \{ \dots\dots\dots \}$

Propriété 28

Les racines de l'unité s'écrivent aussi

$z_k = \dots\dots\dots$ avec $\omega = \dots\dots\dots$

Propriété 29 : Racine $n^{\text{ièmes}}$ de z

Soit $Z = Re^{\mathbf{i}\theta} \neq 0$ (avec $R > 0$)

Alors l'équation $z^n = Z$ admet n solutions distinctes qui s'écrivent

$z_k = \dots\dots\dots$ avec $k \in \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ avec $\omega = \dots\dots\dots$