Fe 4a

Jules Grys

Exo 6

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{i(a+b)}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{i(a+b)}} \left(e^{ia} + e^{ib} \right)$$

$$= \frac{e^{i\frac{a+b}{2}}}{X} \left(e^{i(a - \frac{a+b}{2})} + e^{i(b - \frac{a+b}{2})} \right)$$

avec $X = 1 + e^{i(a+b)}$

$$= \frac{e^{i\frac{a+b}{2}}}{X} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{-a+b}{2}} \right)$$

$$= \frac{e^{i\frac{a+b}{2}} \cos(a-b)}{X}$$

Or $X = 1 + e^{i(a+b)}$

$$= e^{0} + e^{i(a+b)}$$

$$= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{-i\frac{a+b}{2}} + e^{i\frac{a+b}{2}} \right)$$

$$= e^{i\frac{a+b}{2}} \cos(a+b)$$

finalement $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\cancel{e^{i\frac{a+b}{2}}} \cos(a-b)}{\cancel{e^{i\frac{a+b}{2}}} \cos(a+b)}$

$$= \frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$$

donc $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$