

- 1) Écrire sous la forme $a.b^n.c^k$ avec a, b, c constantes (C 018d)

$$\frac{\alpha^{2n-k+1}}{(\beta^{2k+n})^3} = \frac{\alpha^{2n-k+1}}{\beta^{6k+3n}} = \frac{\alpha^{2n}\alpha^{-k}\alpha}{\beta^{6k}\beta^{3n}} = \alpha \left(\frac{\alpha^2}{\beta^3} \right)^n \left(\frac{\alpha^{-1}}{\beta^6} \right)^k$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 < x^2 \leq 16$ (C 075c)

$$\iff \sqrt{3} < |x| \leq 4$$

$$\iff -4 \leq x < -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \sqrt{3} < x \leq 4$$

$$\iff x \in [-4, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 4]$$

- 3) $\sin x = -1 \iff x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 103d)

- 4) $\frac{1}{\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (C 112a)

- 5) $\tan x < \sqrt{3} \iff \frac{-\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 176a)

- 6) $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\mathbf{i}.z) = \operatorname{Re}(z)$ (C 200b)

- 7) z imaginaire pur $\iff z + \bar{z} = 0 \iff \bar{z} = -z$ (C 206b)

- 8) $|2\mathbf{i}(1 + \mathbf{i})^n| = |2\mathbf{i}| \times |1 + \mathbf{i}|^n = 2.(\sqrt{2})^n$ (C 211a)

- 9) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z|.|z'| = |z.z'|$ (C 216b)

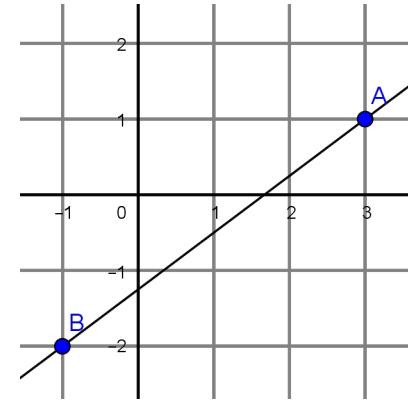
- 10) Soient 2 points A, B d'affixes respectives a, b (C 350b)

Interprétation géométrique : $|a - b| = AB$

- 11) Tangente particulière à la courbe (C) d'équation $y = \ln x$: (C 441b)

La droite d'équation $y = x - 1$ est tangente à C au point $(1,0)$

- 12) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) (C 461b)



$$y = ax + b \quad \text{coefficient directeur} \quad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 1}{-1 - 3} = \frac{3}{4}$$

$$b = y_A - a.x_A = 1 - \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{-5}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

- 13) Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 (C 510d)

telles que $u_{40} = 7$. Calculer u_{23}

$$u_{23} = u_{40} + (23 - 40) \times 3 = 7 - 17 \times 3 = 7 - 51 = -44$$

- 14) Pour $x^2 \neq 1$ et $n \geq 5$ (C 517b)

$$\sum_{k=5}^n x^{2k} = \sum_{k=5}^n (x^2)^k = \frac{(x^2)^5 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{x^{10} - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

- 15) $\sum_{0 \leq j < k \leq n} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n a_{j,k}$ (C 535a)

$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{k=j+1}^n a_{j,k}$ est Faux car dans la première somme, j ne peut pas dépendre de l'indice k qui n'est défini qu'après dans la deuxième somme

$$16) S_n = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^j k \right) = \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (j^2 + j) \quad (\text{C } 537\text{b})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{6} ((2n+1) + 3)$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} (2n+4) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$17) \text{ Factoriser : } a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad (\text{C } 565\text{c})$$

$$18) \text{ Avec la valeur absolue : } x \in [-5, 1] \iff |x+2| \leq 3 \quad (\text{C } 575\text{c})$$

Segment de centre -2 et de rayon 3

$$19) \text{ Vrai ou Faux ?...} \mathbf{Faux} \quad (\text{C } 581\text{c})$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad x \geq -3 \Rightarrow x^2 \leq 9$$

par exemple pour $x = 4$

$$20) \quad \forall k \in [[1, n]], x_k \leq a \quad (\text{C } 588\text{e})$$

$$\iff \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a$$

$$21) \text{ Donner un encadrement, le plus précis possible, de } \lfloor x \rfloor \text{ en utilisant } x$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad (\text{C } 601\text{a})$$

$$22) \text{ Définition de la factorielle : } \begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases} \quad (\text{C } 620)$$

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'initialisation

$$23) \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \cdot \binom{n}{p} \quad \text{pour } 0 \leq p \leq n \quad (\text{C } 629\text{b})$$

$$24) \text{ Formule de Pascal :} \quad (\text{C } 631\text{c})$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n-1$$

$$25) \text{ La formule } \binom{n-2}{p-1} = \frac{n-2}{p-1} \times \binom{n-3}{p-2} \quad (\text{E } 632\text{b})$$

est valable pour $1 \leq p \leq n-1$

$$26) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (1+2)^n = 3^n \quad (\text{C } 640\text{b})$$

$$27) \frac{15!}{6!8!} = \frac{15 \times 14!}{6!8!} = 15 \times \binom{14}{6} \quad (\text{C } 641\text{b})$$

$$28) \text{ Démonstration de : } \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x \quad (\text{C } 715\text{c})$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Prenons $y = \lfloor x \rfloor + 1$

$$\underline{y \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow \underline{y > x} \quad \text{CQFD}$$

$$29) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad (\text{C } 1015\text{b})$$

$\iff$ La courbe C_f admet une asymptote verticale en a d'équation $x = a$

$$30) \text{ Soit } f : I \rightarrow J \text{ une fonction. :} \quad (\text{C } 1023\text{b})$$

$$f \text{ n'est pas constante} \iff \exists (x, y) \in I^2, f(x) \neq f(y)$$