

Exercice 1

On donne : $2 < a < 7$ et $3 < b < 5$.

Encadrer : $A = 2a - 3b$; $B = \frac{a-10}{b}$

$$\begin{aligned} 2 < a < 7 &\Rightarrow 4 < 2a < 14 & (1) \\ 3 < b < 5 &\Rightarrow -15 < -3b < -9 & (2) \\ &\Rightarrow -11 < 3a - 2b < 5 & (1)+(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{-11 < A < 5}$$

$$\begin{aligned} 2 < a < 7 &\Rightarrow -8 < a - 10 < -3 \\ 3 < b < 5 &\Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3} \quad \text{car tout est positif} \end{aligned}$$

On ne pas multiplier car tout n'est pas positif. Mais on multiplie par -1 pour avoir des positif :

$$3 < 10 - a < 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{10-a}{b} < \frac{8}{3} \quad (1) \times (2) \text{ car tout est positif}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{3} < \frac{a-10}{b} < \frac{-3}{5} \quad \times (-1)$$

$$\boxed{\frac{-8}{3} < B < \frac{-3}{5}}$$

Exercice 2 *On commencera chaque inéquation sur une nouvelle page*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : (Les 4 inéquations ont indépendantes)

$$E_1) \quad \boxed{\frac{5x}{4} + \frac{1}{2} - \sqrt{2x+5} < 0}$$

$$\bullet \text{ L'équation est définie si } 2x+5 \geq 0 \iff x \geq \frac{-5}{2}$$

$$\boxed{D = \left[\frac{-5}{2}, +\infty \right[}$$

$$(E) \iff \frac{5x}{4} + \frac{1}{2} < \sqrt{2x+5}$$

$$\iff 5x+2 < 4\sqrt{2x+5}$$

$$5x+2 \geq 0 \iff x \geq -2/5$$

$$\bullet \text{ Premier cas : } \frac{-5}{2} \leq x < \frac{-2}{5}$$

Dans ce cas, $5x+2 < 0$ et $0 \leq \sqrt{2x+5}$

Donc $5x+2 < \sqrt{2x+5}$ est vrai

$$S_1 = \left[\frac{-5}{2} ; \frac{-2}{5} \right[$$

$$\bullet \text{ 2ème cas : } \frac{-2}{5} \leq x \iff 5x+2 \geq 0$$

$$(E) \iff 5x+2 < 2\sqrt{2x+5}$$

$$\iff (5x+2)^2 < 16(2x+5) \quad \text{car tout est positif}$$

$$\iff 25x^2 + 20x + 4 < 32x + 80$$

$$\iff 25x^2 - 12x - 76 < 0$$

$$\Delta = (12)^2 + 4 \times 25 \times 76$$

$$= (4 \times 3)^2 + 4 \times 25 \times 19 \times 4 \quad \text{On peut mettre } 4^2 \text{ en facteur :}$$

$$= 4^2(9 + 25 \times 19) = 4^2(9 + 25 \times 20 - 25)$$

$$= 4^2(9 + 500 - 25) = 4^2.484 = 4^2.4.121 = 8^2.11^2$$

$$x_1 = \frac{12 - 8 \times 11}{50} = \frac{12 - 88}{50} = \frac{-76}{50} = \frac{-38}{25}$$

$$x_2 = \frac{12 + 8 \times 11}{50} = \frac{12 + 88}{50} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\text{Verif : } x_1 x_2 = \frac{-38 \times 2}{25} = \text{"c/a"}$$

$$\text{Donc } \frac{-38}{25} < x < 2$$

$$\text{avec } \frac{-38}{25} < -1 \Rightarrow \frac{-38}{25} < \frac{-2}{5}$$

$$\text{Or } \frac{-2}{5} \leq x \quad \text{D'où } S_2 = \left[\frac{-2}{5} ; 2 \right]$$

$$\bullet \text{ Conclusion : } \boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{-5}{2} ; 2 \right]}$$

$E_2)$

$$|2x + 1| - x - 3 \leq 0$$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$

- 1er cas : $x < -1/2$

$$\text{Alors } 2x + 1 < 0 \Rightarrow |2x + 1| = -2x - 1$$

Donc

$$(E) \iff -2x - 1 - x - 3 \leq 0$$

$$\iff -3x \leq -4$$

$$\iff x \geq \frac{4}{3}$$

Or $x < -2$ C'est donc impossibleDonc $S_1 = \emptyset$

- 2ème cas : $-1/2 \leq x$

$$\text{Alors } |2x + 1| = 2x + 1$$

Donc

$$(E) \iff 2x + 1 - x - 3 \leq 0$$

$$\iff x \geq 2$$

Or $x \geq -1/2$ Donc $S_2 = [2, +\infty[$

- **Conclusion :** $S = S_1 \cup S_2 =]2, +\infty]$

 $E_3)$

$$\frac{x-2}{x} \leq \frac{x+8}{-2x-3} \quad \text{Remarque : } 121 = 11^2$$

L'équation est définie pour $x \neq 0$ et $-2x - 3 \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3/2\}$$

$$(E) \iff \frac{x-2}{x} \leq \frac{x+8}{-2x-3}$$

$$\iff \frac{x-2}{x} - \frac{x+8}{-2x-3} \leq 0$$

$$\iff \frac{(x-2)(-2x-3) - (x+8)x}{x(-2x-3)} \leq 0$$

$$\iff \frac{(-2x^2 - 3x + 4x + 6) - (x^2 + 8x)}{x(-2x-3)} \leq 0$$

$$\iff \frac{-3x^2 - 7x + 6}{x(-2x-3)} \leq 0$$

$$N(x) = -3x^2 - 7x + 6$$

$$\Delta = (-7)^2 + 4 \times 3 \times 6 = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

$$x_1 = \frac{7+11}{-6} = -3 \quad x_2 = \frac{7-11}{-6} = \frac{2}{3}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	$-3/2$	0	$2/3$	$+\infty$
$N(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0
x	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0
$-2x-3$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $
$Q(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$+$	$ $

Donc $S = [-3, -3/2[\cup]0, 2/3]$ $E_4)$

$$2x^4 - 7x^2 - 9 > 0$$

$$(E) \iff 2x^4 - 7x^2 - 9 > 0$$

$$\iff 2X^2 - 7X - 9 > 0 \quad \text{en posant } X = x^2$$

Racine évidente $X_1 = -1$ $X_1 X_2 = -9/2 \Rightarrow X_2 = 9/2$ Donc $(E) \iff X < -1 \text{ OU } X > 9/2$

$$\iff x^2 < -1 \text{ OU } x^2 > 9/2$$

Or $x^2 < -1$ est impossible

$$\text{Et } x^2 > 9/2 \iff |x| > \sqrt{9/2}$$

$$\iff x < -\sqrt{9/2} \text{ OU } x > \sqrt{9/2}$$

$$\text{avec } \sqrt{9/2} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left] -\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$$

k	$\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} + k\pi$
-3	$\frac{-11\pi}{8}(X)$	
-2	$\frac{-7\pi}{8}$	$\frac{-7\pi}{4}(X)$
-1	$\frac{-3\pi}{8}$	$\frac{-3\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
0	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}(X)$
0	$\frac{9\pi}{8}(X)$	

$$S_{]-\pi, \pi[} = \left\{ \frac{-7\pi}{8}, \frac{-3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$$

2) Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 3x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi \\ \iff \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} &\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On pouvait faire aussi :

$$\begin{aligned} \sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \iff \frac{-5\pi}{4} + 2k\pi < 3x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \iff \frac{-5\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} &\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exercice 5 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x^2 - 4| < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$

$|x^2 - 4|$ dépend du signe de $x^2 - 4$

$$x^2 - 4 \geq 0 \iff x^2 > 4 \iff (x \leq -2 \text{ OU } x \geq 2)$$

• 1er cas : $(x \leq -2 \text{ OU } x \geq 2)$

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\text{Donc (E)} \iff x^2 - 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\iff 2x^2 - 8 < -x + 7$$

$$\iff 2x^2 + x - 15 < 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 15 = 121 = 11^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 11}{4} = \frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - 11}{4} = -3$$

$$\text{Vérif : } x_1 x_2 = -15/2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Donc } -3 < x < 5/2$$

$$\text{Or } x \leq -2 \text{ OU } x \geq 2$$

$$\text{Donc } S_1 =]-3, -2] \cup [2, 5/2[$$

• 2ème cas : $-2 < x < 2 \Rightarrow |x^2 - 4| = -x^2 + 4$

$$(E) \iff -x^2 + 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\iff -2x^2 + 8 < -x + 7$$

$$\iff -2x^2 + x + 1 < 0$$

$$\text{Racine évidente : } x_1 = 1 \quad x_1 x_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Donc } x < -1/2 \text{ OU } 1 < x$$

$$\text{Or } -2 < x < 2$$

$$\text{Donc } S_1 =]-2, -1/2[\cup]1, 2[$$

• Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 =]-3 ; -1/2[\cup]1 ; 5/2[$

Musée des horreurs

$$\frac{5x}{2} + \frac{1}{2} > 0 \iff x > \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$$

No comprendo !

$$(E) \iff \frac{5x}{4} + \frac{1}{2} < \sqrt{2x+5}$$

On passe au carré car tout est positif

$$\frac{25x^2}{16} + \frac{1}{4} < 2x + 5$$

En effet $\left(\frac{5x}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25x^2}{16} + \frac{1}{4}$!

D'après la célèbre formule $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Est-il besoin de le préciser ? C'est totalement faux !

$$\sqrt{2x+5} \text{ existe ssi } 2x+5 > 0$$

Car $\sqrt{0}$ n'existe pas ?

$$(E) \iff \frac{5x}{4} + \frac{1}{2} < \sqrt{2x+5}$$

On passe au carré car tout est positif

$$\left(\frac{5x}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 < |2x+5|$$

La valeur absolue est inutile ici.

En effet, $\sqrt{2x+5}$ existe ssi $2x+5 \geq 0$

Et donc quand la racine existe, on a : $\sqrt{2x+5}^2 = 2x+5$

$$|2x+5| > 0 \text{ donc } |2x+5| = 2x+5$$

C'est absurde. En effet une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

Donc le signe de la valeur absolue ne pose aucune question.

Ce qui nous intéresse est le signe de ce qui est **dans** la valeur absolue.

Donc ici, c'est le signe de $2x+5$

On a donc

$$2x+5 > 0 \text{ donc } |2x+5| = 2x+5$$

$$\sqrt{2x+5} \geq 0 \rightarrow 2x+5 \geq 0 \dots$$

C'est quoi cette petite flèche (sympathique au demeurant) ?

Ici il y a une confusion fréquente mais fondamentale entre deux notions :

- L'existence de la racine
- Le signe de la racine

La racine carrée est toujours positive (quand elle existe!)

Par contre la racine existe ssi son contenu est positif

Donc

- $\sqrt{2x+5}$ existe ssi $2x+5 \geq 0$

Ensuite :

- Quand $\sqrt{2x+5}$ existe alors $\sqrt{2x+5} \geq 0$

C'est pour cela que je veux voir écrit

« $\sqrt{2x+5}$ **existe** si et seulement si ... »

$$S_2 = x \in]-\infty; 2/5[$$

Quel est donc cet étrange objet logique ? (ou plutôt illogique) ?

On peut écrire

$$S_2 \in]-\infty; 2/5[$$

ou $x \in]-\infty; 2/5[$

Mais pas le galimatias ci-dessus

$$25x^2 - 12x - 76$$

$$x_1 = 2 \text{ racine évidente} \quad x_2 = \frac{-76}{25}$$

"c/a" est le produit des racines. Donc on a :

$$c/a = \frac{-76}{25} = \underline{2x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{-38}{25}$$

$$|2x+1| \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -2x-1 & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

C'est quoi le rapport entre les deux trucs ?

$$\text{Il faut écrire } |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -2x-1 & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

sinon cela n'a pas de sens.

Mais j'ai eu encore mieux

$$\begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -2x - 1 & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

Tout seul sans aucun lien avec quoi que ce soit !

Un truc comme cela suspendu en l'air... Cela ne veut donc rien dire. C'est comme dire « camion ». Cela passe quand c'est un gamin de 4 ans qui le dit en montrant un véhicule d'un air extasié. Mais bon ! Vous avez dû grandir un peu depuis et acquérir un sens du langage un peu plus évolué. Alors profitez-en !

$$\frac{x-2}{x} \leq \frac{x+8}{-2x-3} \iff \frac{(x-2)(-2x-3)}{x(x+8)} \leq 0$$

Oulalah ! Madre de dio ! Povera me ! Boje moi ! Fichtre ! Diantre ! Tabernacle !

Qu'avons donc là ? Un OMNI ! (Objet mathématique non identifié)

Il semble qu'on a divisé par $\frac{x+8}{-2x-3}$

- D'une part, il est totalement interdit si on ne connaît pas le signe du par lequel on divise (le signe du reste, on s'en fout). Donc il faudrait ici connaître le signe de $\frac{x+8}{-2x-3}$
- D'autre part, cerise sur le gâteau, si on divise on devrait obtenir plutôt 1 que 0 :

$$\frac{(x-2)(-2x-3)}{x(x+8)} \leq 0$$

$$3x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x > \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Une inégalité toute seule n'a aucun sens pour les angles.

Par exemple $3x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ est toujours vrai.

En effet, on peut toujours trouver un k dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$3x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Donc écrire cela n'a aucun intérêt.

Il faut donc, pour les angles, toujours utiliser des **encadrement** (quand bien sûr on travaille avec des inégalités)

$$\sin(3x) = \cos x \dots S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

On travaille sur une **équation**. Donc (en général), les solutions sont des points isolés. Donc il faut utiliser des **accollades** et non pas des crochets qui indiquent des intervalles.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2} \\ \iff \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} &< x^2 - 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2} \\ \text{1er cas : } \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} &< x^2 - 4 \\ \text{2ème cas : } x^2 - 4 &< \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

On distingue des cas quand il y a plus de cas possibles. Donc quand on a un « OU » Et dans ce cas, on réunit les ensembles solutions : $S = S_1 \cup S_2$

Or, ici, on a un encadrement :

$$\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} < x^2 - 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Donc x doit vérifier

$$\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} < x^2 - 4 \quad \textbf{ET} \quad x^2 - 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Il faudra donc rédiger ainsi :

$$\bullet \text{ On a : } \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} < x^2 - 4$$

[...]

$S_1 = \dots$

$$\bullet \text{ ET d'autre part : } x^2 - 4 < \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

[...]

$S_2 = \dots$

$$\bullet \text{ Conclusion } S = S_1 \cap S_2$$

En effet x doit vérifier la première inéquation ET la deuxième

Donc il doit être (en même temps) dans S_1 ET dans S_2

Cad x doit appartenir à $S_1 \cap S_2$

Fini ! OUF !