

1 Nombres complexes

Définition 1 : nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous **forme algébrique** $z = a + b.i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre tel que $i^2 = -1$

a est appelé la **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire** ;

On note : $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors z est réel
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note

$$z \in i.\mathbb{R}$$

Propriété 1 : Égalité

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

Propriété 2 : Parties réelles, imaginaires

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$\operatorname{Re}(a.z_1 + b.z_2) = a.\operatorname{Re}(z_1) + b.\operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(a.z_1 + b.z_2) = a.\operatorname{Im}(z_1) + b.\operatorname{Im}(z_2)$$

En particulier

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

Attention : ça ne marche pas pour le produit complexe :

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$$

Définition 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

Soit $z = a + b.i$ un nombre complexe.

- On dit qu'un point M du plan a pour affixe z s'il a pour coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On note alors $M(z)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe s s'il a pour coordonnées (a, b) dans le même repère c'est-à-dire : $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$

On note $\vec{u}(z)$

Interprétation géométrique : somme, produit par un réel.

2 Conjugué

Définition 3 : Conjugué

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = \overline{a + i.b} = a - i.b$$

Interprétation géométrique

Propriété 3 : Compatibilité avec les opérations

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$\bullet \quad \overline{\bar{z}} = z \quad \overline{a.z + b.z'} = a.\bar{z} + b.\bar{z}'$$

$$\bullet \quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}' \quad \text{Pour } z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\bullet \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Propriété 4 : parties imaginaires, réelles

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

$$z \in i.\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$$

3 Module

Définition 4 : Module

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Conséquence : $z\bar{z} = |z|^2$

Propriété 5

$$\text{Pour } (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a + i.b| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété 6 : Interprétation géométrique

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } M(z), \text{ alors } |z| = OM \\ \text{Si } \vec{u}(z) \text{ alors } |z| = \|\vec{u}\| \\ \text{Si } A(a) \text{ et } B(b) \text{ alors } |b-a| = AB = \|\overrightarrow{AB}\| \end{array} \right.$$

Propriété 7 : compatibilité avec les opérations

$$\left\| \begin{array}{l} z = 0 \iff |z| = 0 \\ |\bar{z}| = |z| \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n \end{array} \right.$$

Attention : marche pas bien avec somme et différence

Propriété 8 : Inverse

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } z \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{array} \right.$$

Propriété 9 : Double inégalité triangulaire

$$\left\| \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad | |z| - |z'| | \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \right.$$

Propriété 10 : Cas d'égalité

$$\left\| \begin{array}{l} |z + z'| = |z| + |z'| \\ \iff z' = 0 \text{ ou } z' = \alpha \cdot z \text{ avec } \alpha \text{ réel positif} \end{array} \right.$$

Interprétation géométrique

Démonstration

1) Montrons d'abord $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

§ Procédons par équivalence :

Les deux termes de l'inégalité sont positifs, donc

$$\begin{aligned} |z + z'| &\leq |z| + |z'| \\ \iff |z + z'|^2 &\leq (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff (z + z')(\overline{z + z'}) &\leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ \iff (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') &\leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ \iff z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' &\leq z\bar{z} + 2|z||z'| + z'\bar{z}' \\ \iff z\bar{z}' + z'\bar{z} &\leq 2|z||z'| \\ \iff z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} &\leq 2|z||z'| \\ \iff 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') &\leq 2|z\bar{z}'| \\ \iff \operatorname{Re}(z\bar{z}') &\leq |z\bar{z}'| \end{aligned}$$

§ Posons $Z = z\bar{z}' = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

et montrons que $\operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$

On a $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$ et $|a| \geq a$

D'où $|Z| \geq \operatorname{Re}(Z)$

Et donc $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'|$

Ce qui prouve l'inégalité

2) Profitons-en pour déterminer le cas d'égalité : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

D'après ce qui précède :

$$|z + z'| = |z| + |z'|$$

$$\iff |Z| = \operatorname{Re}(Z)$$

$$\iff \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} \text{ et } |a| = a$$

$$\iff b = 0 \text{ et } a \geq 0$$

$$\Rightarrow z\bar{z}' = a \in \mathbb{R}^+$$

• Premier cas : $z' = 0$

• Deuxième cas : $z' \neq 0$

$$\text{Alors } z\bar{z}' = a$$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{\bar{z}'} = \frac{a \cdot z'}{z' \cdot \bar{z}'} = \frac{a}{|z'|^2} z' = \alpha \cdot z' \text{ avec } \alpha = \frac{a}{|z'|^2} \geq 0$$

(Remarque : on a raisonné par **implication**. Il faut donc vérifier la **réciproque** :

• Premier cas : $z' = 0$.

alors trivialement $|z + z'| = |z| = |z| + |z'|$

- Deuxième cas : $z = \alpha.z'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Alors

$$\begin{aligned}|z + z'| &= |\alpha z' + z'| = |(\alpha + 1)z'| = (\alpha + 1)|z'| \quad \text{car } 1 + \alpha \geq 0 \\ &= \alpha|z'| + |z'| = |\alpha.z'| + |z'| \quad \text{car } \alpha \geq 0 \\ &= |z| + |z'|\end{aligned}$$

Dans les deux cas cela marche.

- 3) Il reste à montrer l'inégalité de gauche : $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$

$|z| - |z'|$ et $|z + z'|$ sont deux réels

Or, pour $A \in \mathbb{R}$ et $B \geq 0$

$$|A| \leq B$$

$$\iff \max(A, -A) \leq B$$

$$\iff A \leq B \quad \text{et} \quad -A \leq B$$

Donc

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'|$$

$$\iff |z| - |z'| \leq |z + z'| \quad \text{et} \quad |z'| - |z| \leq |z + z'|$$

$$\iff |z| \leq |z + z'| + |z'| \quad \text{et} \quad |z'| \leq |z + z'| + |z|$$

Or

$$|z| = |(z + z') + (-z')| \leq |z + z'| + |-z'| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\Rightarrow |z| \leq |z + z'| + |z'| \quad \text{car} \quad |-z'| = |z'|$$

Cette inégalité est vraie pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$

On peut donc échanger z et z' :

$$|z'| \leq |z + z'| + |z|$$

On a bien obtenu les deux inégalités voulues. CQFD

fin demo

4 Nombre complexes de module 1

Définition 5 : ensemble des complexes de module 1

| On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Propriété 11 : Angle

|| A tout point du cercle $\mathbb{U}$ correspond un angle θ , défini modulo 2π , tel que $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$

Propriété 12 : Argument

|| Tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit $z = \cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta)$
|| où θ est appelé **un argument** de z et est noté $\arg(z)$

Géométrie : angle θ

Complexe : argument θ

Définition 6 : notation exponentielle

| Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta)$

Propriété 13 opérations

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet e^{i \cdot 0} = 1 \quad e^{i \cdot \pi} = -1 \quad e^{i \cdot \pi/2} = \mathbf{i} \\ \bullet \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad |e^{i\theta}| = 1 \\ \bullet e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \quad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \\ e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n \end{array} \right.$$

Démonstration Les premières propriétés sont triviales

- Montrons que $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ (1)

$$\begin{aligned}e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + \mathbf{i} \sin x)(\cos y + \mathbf{i} \sin y) \quad \text{par définition} \\ &= \cos x \cos y + \mathbf{i} \sin x \cos y + \mathbf{i} \cos x \sin y + \mathbf{i}^2 \sin x \sin y \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \mathbf{i}(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x + y) + \mathbf{i} \sin(x + y) = e^{i(x+y)} \quad \text{par définition}\end{aligned}$$

- D'après cette propriété on a :

$$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i(\theta - \theta)} = e^{i \cdot 0} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \quad (2)$$

- $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}$ d'après (2)
 $= e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ d'après (1)

- Mq $\forall n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$

On commence par le démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

§ Initialisation : pour $n = 0$,

$$e^{in\theta} = e^{i0} = 1 \text{ et } [e^{i\theta}]^n = [e^{i\theta}]^0 = 1$$

Vrai pour $n = 0$

§ Hérédité : supposons la relation vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné

On a : $e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$ (H.R.)

$$e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n\theta + \theta)} = e^{in\theta} e^{i\theta} \text{ d'après (1)}$$

$$= [e^{i\theta}]^n e^{i\theta} \text{ d'après H.R.}$$

$$= [e^{i\theta}]^{n+1}$$

La relation est vraie au rang $n + 1$

§ Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$ (3)

Il reste à la démontrer pour $n < 0$:

Soit $n \in \mathbb{Z}^-$. On a $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Donc

$$e^{in\theta} = e^{-ip\theta} = \frac{1}{e^{ip\theta}} \text{ d'après (2)}$$

$$= \frac{1}{[e^{i\theta}]^p} \text{ d'après (3) car } p \in \mathbb{N}$$

$$= [e^{i\theta}]^{-p} = [e^{i\theta}]^n$$

Conclusion : La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ CQFD

fin demo

4.1 Formules d'Euler

Propriété 14

$$\left\| \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right.$$

ou encore

Propriété 15

$$\left\| \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) \right.$$

Démonstration En effet, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\Rightarrow \cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{Et } \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{CQFD}$$

fin demo

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{e^{ia} + e^{ib}}{2} = 1 - e^{-ia}$ etc.

- Linéarisation : $\cos^3 x \cdot \sin x$

Solutions

- $e^{ia} + e^{ib}$

On met en facteur « l'angle milieu ». Ici c'est $e^{i\frac{a+b}{2}}$

Méthode bourrin (mais efficace) :

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{e^{ia} + e^{ib}}{e^{i\frac{a+b}{2}}} \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(\frac{e^{ia}}{e^{i\frac{a+b}{2}}} + \frac{e^{ib}}{e^{i\frac{a+b}{2}}} \right) \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{ia - i\frac{a+b}{2}} + e^{ib - i\frac{a+b}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{-a+b}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{i\frac{a+b}{2}} \cdot 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Remarque : la factorisation peut se faire « à la volée » en sautant les trois premières étapes.

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}})$$

$$\bullet \quad 1 - e^{-ia}$$

$$1 - e^{-ia} = e^0 - e^{-ia}$$

On met en facteur l'angle milieu, ici $-a/2$

$$1 - e^{-ia} = e^{-ia/2} (e^{+ia/2} - e^{-ia/2}) \quad \text{avec} \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$= e^{-ia/2} \cdot 2i \cdot \sin(a/2)$$

$$\bullet \quad C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{et sa soeur jumelle :} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

$$\text{On a} \quad \cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx})$$

$$\text{Donc} \quad C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ikx})$$

$$\text{Et comme} \quad \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

On peut écrire :

$$C_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re}(\sigma_n) \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$$

Remarque

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \sin(kx) \\ &= C_n + i S_n \end{aligned}$$

$$\text{et donc} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \operatorname{Im}(\sigma_n) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right)$$

(Reprenons nos calculs :)

Calcul de σ_n

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{i.kx} = \sum_{k=0}^n (e^{i.x})^k$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i.x}$

$$\text{Or} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{pour} \quad q \neq 1$$

$$\text{Et} \quad e^{ix} = 1 \iff x = 0 + 2k\pi$$

Il faut donc distinguer 2 cas :

$$\S \text{ 1er cas : } e^{i.x} = 1 \iff x = 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Alors

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n 1^k = n + 1$$

$$\Rightarrow C_n = \operatorname{Re}(\sigma_n) = n + 1$$

$$\text{et} \quad S_n = \operatorname{Im}(\sigma_n) = 0$$

$$\S \text{ 2ème cas : } e^{i.x} \neq 1 \iff x \neq 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^n (e^{i.x})^k \\ &= \frac{1 - (e^{i.x})^{n+1}}{1 - e^{i.x}} \\ &= \frac{1 - e^{i.(n+1)x}}{1 - e^{i.x}} \\ &= \frac{e^{i.(n+1)x/2}}{e^{i.x/2}} \cdot \frac{e^{-i.(n+1)x/2} - e^{i.(n+1)x/2}}{e^{i.x/2} - e^{-i.x/2}} \end{aligned}$$

$$= e^{i \cdot (n+1)x/2 - ix/2} \cdot \frac{-2i \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

$$= e^{i \cdot nx/2} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

D'où

$$C_n = \operatorname{Re}(\sigma_n)$$

$$= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Re}(e^{i \cdot nx/2})$$

$$= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \cos \frac{nx}{2}$$

Remarque : Cette méthode donne aussi, sans autre calcul, la valeur de S_n :

$$\text{Si } x = 0 \quad [2\pi] \quad S_n = 0$$

$$\text{Si } x \neq 0 \quad [2\pi] \quad S_n = ?$$

$$S_n = \operatorname{Im}(\sigma_n) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im}(e^{i \cdot nx/2}) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \sin \frac{nx}{2}$$

• Linéarisation : $\cos^3 x \cdot \sin x$

$$\cos^3 x \cdot \sin x$$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{16i} (e^{ix} + e^{-ix})^3 (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{16i} ((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3) (e^{ix} - e^{-ix})$$

(binôme de Newton)

$$= \frac{1}{16i} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{16i} \begin{pmatrix} e^{4ix} & +3e^{2ix} & +3e^{0x} & +e^{-2ix} \\ & -e^{2ix} & -3e^{0x} & -3e^{-2ix} & -e^{-4ix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16i} \begin{pmatrix} e^{4ix} & +2e^{2ix} & & -2e^{-2ix} & -e^{-4ix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16i} ((e^{4ix} - e^{-4ix}) + 2(e^{2ix} - e^{-2ix}))$$

$$= \frac{1}{16i} (2i \sin 4x + 4i \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{8} (\sin 4x + 2 \sin 2x)$$

Vérifications :

- Pour $x = \pi/4$,

$$\cos^3(x) \sin(x) = (\sqrt{2}/2)^3 (\sqrt{2}/2) = 1/4$$

$$(\sin 4x + 2 \sin 2x)/8 = (\sin \pi + 2 \sin \pi/2)/8 = 2/8$$

- Pour $x = \pi/3$

$$\cos^3(x) \sin(x) = (1/2)^3 (\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/16$$

$$(\sin 4x + 2 \sin 2x)/8 = (\sin 4\pi/3 + 2 \sin 2\pi/3)/8$$

$$= (-\sqrt{3}/2 + 2\sqrt{3}/2)/8 = (\sqrt{3}/2)/8$$

Ça a l'air de tenir la route

4.2 Formule de Moivre

Propriété 16

$$\| (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Application : Calcul de $\cos(3x)$, $\sin(3x)$ en fonction $\sin x$, $\cos x$

Solution :

$$\cos(3x) + i \sin(3x) = e^{3ix}$$

$$= (\cos x + i \sin x)^3$$

$$= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(i \sin x) + 3(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3$$

$$= \cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

$$\Rightarrow \cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\text{et } \sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{3ix}) = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

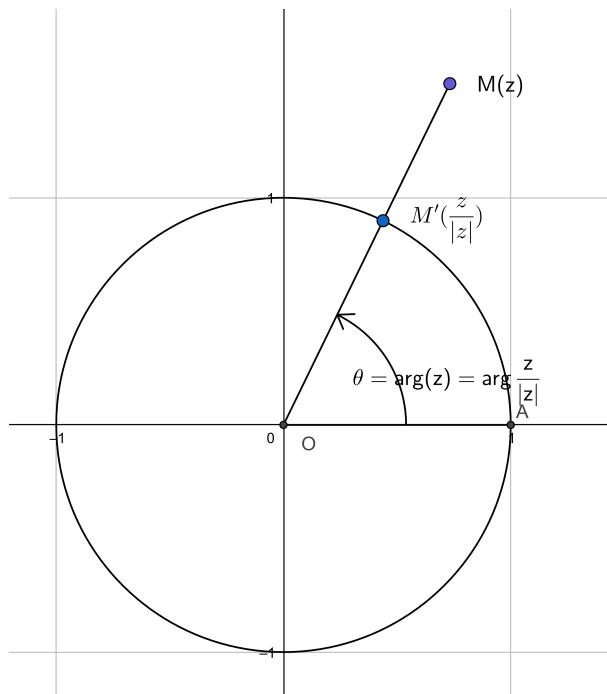
5 Argument

Propriété 17

|| Soit $z \in \mathbb{C}^*$. alors $z/|z| \in \mathbb{U}$

En effet, $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$

Interprétation géométrique :



Définition 7 : Argument

Soit $z \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = |z|e^{i\theta}$
 θ est appelé un argument de z et on note $\theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

Attention : un argument est toujours défini modulo 2π

Exemples : donner les arguments des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i, z_2 = -3, z_3 = -\sqrt{3}i \quad z_4 = 1 + i, z_5 = 1 - i\sqrt{3}$$

Correction

- $\arg(i) = \pi/2 \quad [2\pi]$
- $\arg(-3) = \pi \quad [2\pi]$
- $\arg(-\sqrt{3}i) = 3\pi/2 \quad [2\pi]$
- $\arg(1 + i) = ?$

$$|z_4| = |1 + i| = \sqrt{2} \Rightarrow z_4 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow \arg(z_4) = \pi/4 \quad [\pi]$$

- $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$

$$|z_5| = 2 \Rightarrow z_5 = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\pi/3}$$

$$\Rightarrow \arg(z_5) = \pi/3 \quad [2\pi]$$

Propriété 18 : Valeurs particulières

- a) $\arg(z) = 0 \quad [2\pi] \iff z \text{ réel positif}$
- b) $\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \iff z \text{ réel négatif}$
- c) $\arg(z) = \pi \quad [\pi] \iff z \text{ réel (positif ou négatif)}$
- d) $z \text{ imaginaire pur} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Propriété 19 : opérations

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(a \cdot z) = \begin{cases} \arg(z) \quad [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arg(z) + \pi \quad [2\pi] & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$$\arg(-z) = ?$$

Définition 8 : forme exponentielle

Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{où } r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$

Propriété 20 : Égalité par module et argument

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } z_1, z_2 \text{ deux complexes non nuls} \\ z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \end{cases} \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

6 Exponentielle complexe**Définition 9 : Exponentielle complexe**

- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$
- Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$$

Remarque : pour en arriver là, on a procédé par étapes successives :

- La fonction exponentielle est déjà connue sur $\mathbb{R}$
- Sur $i\mathbb{R}$, on a défini $e^{i\theta}$
- Enfin, on définit maintenant l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier

Propriété 21 : Opérations

$$\left\| \begin{array}{l} e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \quad e^{n \cdot z} = (e^z)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Démonstration Pour $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ Par exemple :

- $\overline{e^z} = \overline{e^{a+ib}} = \overline{e^a \cdot e^{ib}} = \overline{e^a} \cdot \overline{e^{ib}} = e^a \cdot e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\bar{z}}$
- $|e^z| = |e^{a+ib}| = |e^a \cdot e^{ib}| = |e^a| \cdot |e^{ib}| = e^a \times 1 = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- $\arg(e^z) = \arg(e^a \cdot e^{ib}) = \arg(e^a) + \arg(e^{ib}) = 0 + b = \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi]$

fin demo

Propriété 22 : Égalité

$$\left\| \begin{array}{l} e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = 1 \\ \iff z' - z = i \cdot 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Démonstration

$$e^z = e^{z'}$$

$$\begin{aligned} \iff |e^z| &= |e^{z'}| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(e^{z'}) + 2k\pi \\ \iff e^{\operatorname{Re}(z)} &= e^{\operatorname{Re}(z')} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') + 2k\pi \\ \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases} \quad [2\pi] \\ \iff z' &= z + i \cdot 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

fin demo

Propriété 23 : Équation $e^z = a$, $a \in \mathbb{C}$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit l'équation } e^z = a \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C} \\ \bullet \text{ Si } a = 0, \text{ n'admet pas de solution} \\ \bullet \text{ Si } a \neq 0, \text{ admet une infinité de solutions de la forme} \\ z = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Démonstration

- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$ Donc $e^z = 0$ est impossible
- Pour $a \in \mathbb{C}^*$

$$e^z = a$$

$$\begin{aligned} \iff |e^z| &= |a| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(a) + 2k\pi \\ \iff e^{\operatorname{Re}(z)} &= |a| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \arg(a) + 2k\pi \\ \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \ln |a| \\ \operatorname{Im}(z) &= \arg(a) \end{cases} \quad [2\pi] \\ \iff z &= \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

fin demo

7 Géométrie

7.1 Interprétations géométriques

- $z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- $|z_M| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$
- $|z_B - z_A| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
- $\arg(z_u) = (\vec{i}, \vec{u}) \quad [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u}) = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \arg \frac{z_v}{z_u} \quad [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z(\overrightarrow{AC})}{z(\overrightarrow{AB})} \right) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \quad [2\pi]$

7.2 propriétés géométriques (non exhaustives)

- Cercle de centre $A(z_A)$ et rayon $r > 0$:

$$M(z) \in C(A, r) \iff AM = r$$

$$\iff |z - z_A| = r \iff (z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_A}) = r^2$$

- Colinéarité : Pour $u \neq 0, v \neq 0$

u, v colinéaires

$$\iff u = kv \text{ avec } k \in \mathbb{R}^*$$

$$\iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}^* \iff \frac{\overline{z_v}}{\overline{z_u}} = \frac{z_v}{z_u} \iff \arg \frac{z_v}{z_u} = 0 \quad [\pi]$$

- Alignement : Pour A, B, C distincts,

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$\iff \frac{z(\overrightarrow{AB})}{z(\overrightarrow{AC})} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\overline{z_B - z_A}}{\overline{z_C - z_A}}$$

- perpendicularité :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arg \frac{z_v}{z_u} = \pi/2 \quad [\pi]$$

$$\iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R} \iff \frac{\overline{z_v}}{z_u} + \frac{z_v}{z_u} = 0$$

8 Second degré

8.1 Équation du second degré

Propriété 25 : Solutions des équations du second degré

Soit l'équation $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{C}^*, (b, c) \in \mathbb{C}^2$

On note $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ le discriminant de cette équation

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double $z_0 = \frac{-b}{2a}$

$$\text{et } Q(z) = a(z - z_0)^2$$

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

$$\text{Et } Q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Démonstration

On met le polynôme sous forme canonique :

$$Q(z) = az^2 + bz + c$$

$$= a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right]$$

On veut faire apparaître le début d'un carré : $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$

$$Q(z) = a \left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\
&= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] \quad \text{avec } \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac \\
&= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] \\
&= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \\
&= a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) \\
&= a(z - z_1)(z - z_2)
\end{aligned}$$

avec $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ qui sont les deux racines de Q

Dans le cas où $\Delta = 0$,

les deux racines sont égales à $z_0 = \frac{-b}{2a}$ et $Q(z) = a(z - z_0)^2$ CQFD

fin demo

Propriété 26 : Produit et somme des racines

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines du polynôme } Q(z) = az^2 + bz + c = \\ 0 \text{ (avec } z_1 = z_2 \text{ dans le cas de la racine double),} \\ \text{alors} \quad P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}, \quad S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \end{array} \right.$$

Démonstration

On revient à la forme factorisée :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2) \\
&= az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2
\end{aligned}$$

Par identification avec $Q(z) = az^2 + bz + c$

On a $-a(z_1 + z_2) = b$ et $az_1 z_2 = c$ Ce qui donne les formules voulues.

fin demo

Propriété 27 : Solutions des sommes et produits

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les solutions du système } \begin{cases} z_1 z_2 = P \\ z_1 + z_2 = S \end{cases} \text{ sont les couples} \\ (z_1, z_2) \text{ solutions de l'équation } z^2 - sz + p = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration

(z_1, z_2) sont les solutions de l'équation $(z - z_1)(z - z_2) = 0$

avec $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 - sz + p$

Donc (z_1, z_2) sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

fin demo

8.2 Racines carrées d'un complexe

Soit $z = a + \mathbf{i}b$ On cherche $\delta = x + \mathbf{i}y$ tel que $\delta^2 = z$

$$\iff a + \mathbf{i}b = (x^2 - y^2) + \mathbf{i}2xy$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

$$\text{De plus : } |z| = |\delta|^2 \iff x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

En faisant (1) + (3), on obtient x^2 et donc les deux valeurs opposées de x .

En faisant (3) + (1), on obtient y^2 et donc les deux valeurs opposées de y .

En utilisant l'équation (2), on trouve le signe de xy et donc les deux couples (x, y) solutions.

Et cela donne les solutions δ_1 et $\delta_2 = -\delta_1$

Exemples : Trouver les racines carrées de $2 + \mathbf{i}$ puis de $1 - 3\mathbf{i}$

Cherchons $\delta = x + \mathbf{i}y$ tel que $\delta^2 = 2 + \mathbf{i}$

$$\iff (x + \mathbf{i}y)^2 = 2 + \mathbf{i} \iff x^2 - y^2 + \mathbf{i}2xy = 2 + \mathbf{i}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$$

D'autre part $(x + \mathbf{i}y)^2 = 2 + \mathbf{i} \Rightarrow |x + \mathbf{i}y|^2 = |2 + \mathbf{i}|$

$$\iff x^2 + y^2 = \sqrt{5} \quad (3)$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$$

$$(3)-(1) \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow y^2 = \frac{2\sqrt{5} - 4}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2} \text{ ou } y = \frac{-\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$$

$$\text{Enfin, } (2) \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy > 0$$

Donc les seules solutions possibles sont :

$$\delta_1 = \frac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} + \mathbf{i} \frac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\delta_1$$

9 Racines $n^{\text{èmes}}$

Définition 11 : Racines $n^{\text{ièmes}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z si et seulement si $z^n = Z$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si et seulement si $z^n = 1$

On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Propriété 28 : Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont de la forme

$$z_k = e^{\mathbf{i} \frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (\text{ou } k \in \{1, \dots, n\})$$

$$\text{On a donc} \quad \mathbb{U}_n = \{e^{\mathbf{i} \frac{2k\pi}{n}} / k \in [0, n-1]\}$$

Démonstration

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z^n| = |1| \\ \arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'une part,

$$|z^n| = |1| \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = 1 \quad \text{car on est dans } \mathbb{R}^+$$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \arg(z) = 0 + 2k\pi$$

$$\Longleftrightarrow \quad \arg z = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$z^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg z = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = z_k \quad \text{avec} \quad z_k = e^{\mathbf{i} \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Enfin, pour $k = n$, on retrouve $z_n = z_0$

Il suffit donc de prendre les valeurs de k dans $[[0; n-1]]$, ce qui donne bien n racines distinctes.

fin demo

Propriété 29

Les racines de l'unité s'écrivent aussi

$$z_k = (\omega)^k \quad \text{avec} \quad \omega = e^{\mathbf{i} \frac{2\pi}{n}} = z_1$$

Propriété 30 : Racine $n^{\text{ièmes}}$ de z

Soit $Z = Re^{\mathbf{i}\theta} \neq 0$ (avec $R > 0$)

Alors l'équation $z^n = Z$ admet n solutions distinctes qui s'écrivent

$$\begin{aligned} z_k &= R^{1/n} e^{\mathbf{i} \frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ &= R^{1/n} e^{\mathbf{i}\theta/n} \omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = e^{\mathbf{i} 2\pi/n} \end{aligned}$$

Démonstration $z^n = Re^{\mathbf{i}\theta} = Z$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z^n| = |Z| \\ \arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'une part,

$$|z^n| = |Z| \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^n = R \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = \sqrt[n]{R} = R^{1/n} \quad \text{car on est dans } \mathbb{R}^+$$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow n \arg(z) = \theta + 2k\pi$$

$$\Longleftrightarrow \arg z = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$z^n = 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = R^{1/n} \\ \arg z = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z = z_k \quad \text{avec}$$

$$z_k = R^{1/n} e^{\mathbf{i} \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= R^{1/n} e^{\mathbf{i} \frac{\theta}{n}} e^{\mathbf{i} \frac{2k\pi}{n}}$$

$$= R^{1/n} e^{\mathbf{i} \theta / n} \omega^k \quad \text{avec } \omega = e^{\mathbf{i} 2\pi / n} \quad \text{fin demo}$$