

1) Simplifier : pour $x > 0$, $e^{\frac{1}{2} \ln x} = \sqrt{x}$ (C 037d)

2) Avec la valeur absolue : $x \in [-5, 1] \iff |x+2| \leq 3$ (C 575c)

Segment de centre $\frac{-5+1}{2} = -2$ et de rayon $\frac{1-(-5)}{2} = 3$

3) $x^2 + x > 0 \iff x(x+1) > 0$ (C 067d)

$\iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ ($\iff x < -1$ OU $x > 0$)

4) **Vrai ou Faux ?** (C 584d)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{2} \Rightarrow x < 2$

Car $\frac{1}{x} > \frac{1}{2} > 0$ donc tout est positif
attention : la réciproque est fausse

5) Dans $\mathbb{R}$: $\tan x = -1 \iff x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 104d)

6) $\sin x < 1/2 \iff 5\pi/6 + 2k\pi < x < 13\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

($\iff -7\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$)

$\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]5\pi/6 + 2k\pi, 13\pi/6 + 2k\pi[$) (C 163a)

7) Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z.z') = PFC$ (C 202)

8) $|2i(1+i)^n| = |2i| \times |1+i|^n = 2.(\sqrt{2})^n$ (C 211a)

9) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \frac{\arg(z)}{\arg(z')} = PFC$ (C 220b)

10) Pour $z \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}, n \arg(z) = \arg(z^n)$ $[2\pi]$ (C 224b)

11) Formule d'Euler : $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (C 235b)

12) $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}} \right) = 2i e^{i\frac{a+b}{2}} \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (C 238b)

13) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = -i \iff e^z = e^{i(-\pi/2+2k\pi)}$ (C 239d)

$\iff z = i \left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$

14) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$ $[2\pi]$ (C 243)

Pour $z = a + ib$, $e^z = e^a e^{ib}$
 $\Rightarrow \arg(e^z) = \arg(e^{ib}) = b = \operatorname{Im}(z)$ $[2\pi]$

15) Définition : pour $n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$ (C 250d)

$z^n = 1 \iff z \in \mathbb{U}_n$

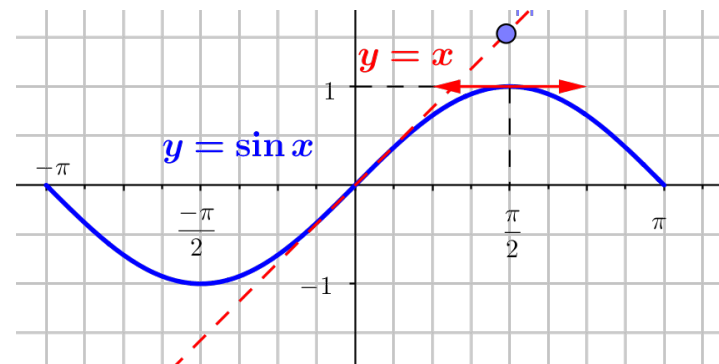
16) Racines n -ièmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 251c)

sont de la forme $z_k = \omega^k$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $k \in [[0, n-1]]$

17) Soient 2 points A, B d'affixes respectives a, b (C 350b)

Interprétation géométrique : $|a - b| = AB$

18) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ (C 446a)



Tracer la tangente en 0 et donner son équation : $y = x$

La tangente doit passer par le point $(\pi/2, 1)$ à peu de chose près

$$\begin{aligned}
 19) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) & (C\ 506b) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \text{ Pour } x^2 \neq 1 \text{ et } n \geq 5 & & (C\ 517b) \\
 \sum_{k=5}^n x^{2k} &= \sum_{k=5}^n (x^2)^k = \frac{(x^2)^5 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{x^{10} - x^{2n+2}}{1 - x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21) S_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j j = \sum_{j=0}^n j(j+1) = \sum_{j=0}^n j^2 + \sum_{j=0}^n j & (C\ 537a) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} ((2n+1) + 3) = \frac{n(n+1)}{6} (2n+4) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
 \end{aligned}$$

$$22) \text{ Factoriser : } a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad (C\ 565c)$$

$$\begin{aligned}
 23) \text{ Définition : Soit } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x] = y & & (C\ 600b) \\
 \iff \begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y \leq x < y+1 \end{cases} \\
 \iff \boxed{x = y + \alpha \quad \text{avec } y \in \mathbb{Z} \quad \text{et } \alpha \in [0,1[}
 \end{aligned}$$

$$24) \text{ Pour } n \geq 1, \quad \prod_{k=0}^n j = j^{n+1} \quad (C\ 610a)$$

$$25) \binom{n-1}{p} = \frac{n-1}{p} \times \binom{n-2}{p-1} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n-1 \quad (C\ 629c)$$

$$26) \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad \text{valable pour } 1 \leq p \leq n-1 \quad (C\ 632a)$$

$$\begin{aligned}
 1 \leq p &\quad \text{pour que } \binom{n-1}{p-1} \text{ existe} \\
 p \leq n-1 &\quad \text{pour que } \binom{n-1}{p} \text{ existe}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27) \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \cdot 1^{n+1-k} \right) - \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \\
 &= (1+x)^{n+1} - x^{n+1} & (C\ 640e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28) \text{ Soit (E) une équation d'inconnue } x. \text{ On a :} & & (C\ 713a) \\
 (E) \implies \dots \implies x=3 \text{ ou } x=5 \\
 \text{Que peut-on dire en français de 3 et 5 ?}
 \end{aligned}$$

3 et 5 sont les seuls solutions **possibles** de l'équation (E).

$$29) \text{ Vrai ou Faux ?...Faux} \quad (C\ 717d)$$

$$(x > 2 \text{ OU } x > 3) \iff x > 3$$

$$\text{En effet, } (x > 2 \text{ OU } x > 3) \iff x > 2$$

$$\begin{aligned}
 30) \text{ Soit } f : I \rightarrow J \text{ une fonction. Traduire avec quantificateurs :} & & (C\ 1023a) \\
 f \text{ est constante} &\iff \forall (x,y) \in I^2, f(x) = f(y) \\
 (\text{ou bien : } \exists b \in J, \forall x \in I, f(x) = b)
 \end{aligned}$$