

$$1) (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{pour} \quad x \geq 0 \quad (\text{C } 026b)$$

$\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geq 0$.

Et dans ce cas, $(\sqrt{x})^2 = x$ sans valeur absolue puisque x est positif.

Ne pas confondre avec $\sqrt{x^2}$ qui existe pour tout $x \in \mathbb{R}$

et dans ce cas : $\sqrt{x^2} = |x|$

$$2) \text{ Pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } r > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{C } 575a)$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r, a + r]$$

$$3) \text{ Vrai ou faux ? ... } \mathbf{Faux ?} \quad (\text{C } 067c)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < x^2 \iff 1 < x$$

Contre-exemple : pour $x = -1$: $x < x^2$ est vrai mais $1 < x$ est faux

$$4) \text{ Vrai ou Faux ? ... } \mathbf{Faux} \quad (\text{C } 584c)$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

Il suffit de prendre x négatif (par exemple $x = -2$ pour voir que cela ne marche pas. En effet, l'implication n'est vraie que « si tout est positif »

$$5) \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{C } 103a)$$

$$6) \frac{1}{\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (\text{C } 112a)$$

$$7) \text{ Dans } \mathbb{R} : \tan x \leq \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (\text{C } 176c)$$

$$\iff \frac{-\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{-\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8) \text{ Définition : } z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \boxed{\sqrt{z \cdot \bar{z}}} \quad (\text{C } 210b)$$

$$9) \forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| = \text{PFC} \quad (\text{C } 215b)$$

$$10) \forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \arg(z) - \arg(z') = \arg(z/z') \quad [2\pi] \quad (\text{C } 222b)$$

$\arg(z) - \arg(z') = \frac{\arg(z)}{\arg(z')}$ est totalement absurde, car cela reviendrait à écrire $a - b = \frac{a}{b}$

$$11) \forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi] \quad (\text{C } 227a)$$

En effet, $\arg(-1 \cdot z) = \arg(z) + \arg(-1) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$

$$12) e^{inx} = \cos nx + \mathbf{i} \sin nx = (e^{ix})^n = (\cos x + \mathbf{i} \sin x)^n \quad (\text{C } 236b)$$

$$13) 1 - e^{-ib} = e^{-ib/2} (e^{ib/2} - e^{-ib/2}) = 2\mathbf{i} e^{-ib/2} \sin(b/2) \quad (\text{C } 238d)$$

$$14) \text{ Définition : } z \in \mathbb{C}, \quad (\text{C } 240a)$$

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{\mathbf{i} \operatorname{Im}(z)} = \boxed{e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + \mathbf{i} \sin(\operatorname{Im}(z)))}$$

On demande e^z donc il faut écrire un résultat qui dépend de z

$$15) \text{ Pour } z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad (\text{C } 242)$$

Pour $z = a + \mathbf{i}b \quad ((a, b) \in \mathbb{R}^2)$, on a

$$|e^z| = |e^{a+\mathbf{i}b}| = |e^a| \cdot |e^{\mathbf{i}b}| = e^a \times 1 = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$16) \text{ Définition : pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad z \in \mathbb{U}_n \quad (\text{C } 250c)$$

$$\iff z^n = 1 \iff z \text{ est racine } n^{\text{ème}} \text{ de l'unité}$$

On demande la définition pas la propriété

$$17) \text{ Propriété : Dans } \mathbb{C}, \text{ soient } n \in \mathbb{N}^*, r > 0, \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{C } 251b)$$

$$z^n = re^{i\theta} \iff z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ (\text{ou avec } k \in \{1, 2, \dots, n\})$$

18) Racines n -ièmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 251d)

sont de la forme $z_k = \omega^k$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $k \in [[0, n-1]]$

19) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A un point d'affixe a (C 350c)

Interprétation géométrique : $|a| = OA$

$$20) \sum_{k=n}^{2n} a = (2n - n + 1)a = (n + 1)a \quad (\text{C 503a})$$

$$21) S_n = \sum_{k=1}^n x^{2k} = \sum_{k=1}^n (x^2)^k \quad (\text{C 517a})$$

$$\text{Si } x^2 \neq 1, \quad S_n = x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = \frac{x^2 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

$$\text{Si } x^2 = 1 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1) \quad S_n = n$$

$$22) \sum_{0 \leq j < k \leq n} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n a_{j,k} \quad (\text{C 535a})$$

$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{k=j+1}^n a_{j,k}$ est **faux** car dans la première somme, j ne peut pas dépendre de l'indice k qui n'est défini qu'après dans la deuxième somme.
D'autre part, l'inégalité $j < k$ est **stricte** donc $j < k \leq n \Rightarrow j < n$
 j doit donc s'arrêter en $n - 1$

$$23) \text{ Factoriser : } a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad (\text{C 565c})$$

$$24) \min(x_1, \dots, x_n) \leq a \iff \exists i \in [[1, n]], x_i \leq a \quad (\text{C 590b})$$

25) Définition : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (C 600c)

$$\lfloor x \rfloor = y \iff x = y + \alpha \text{ avec } y \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0, 1[$$

$$\iff \boxed{y \in \mathbb{Z} \text{ et } y \leq x < y + 1}$$

Ne pas oublier que $y \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, on ne peut pas utiliser la partie entière pour définir la partie entière. Cela n'aurait pas de sens. Ainsi écrire :

$$\int x = y \iff x \leq \lfloor x \rfloor < x + 1$$

ne définit nullement la partie entière, puisque cela utilise la partie entière. Donc pour savoir si cela est vrai, il faudrait savoir ce que c'est que la partie entière. C'est le serpent qui se mord la queue : un *oroubos*.

En plus, y n'intervient pas, ce qui est quand même étrange !

$$26) \text{ Définition de la factorielle : } \begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases} \quad (\text{C 620})$$

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'initialisation

Et de plus préciser que la relation est vraie pour tout n

27) Formule de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ pour } 0 \leq p \leq n \quad (\text{C 630})$$

$$28) \text{ La formule } \binom{n-2}{p-1} = \frac{n-2}{p-1} \times \binom{n-3}{p-2} \quad (\text{C 632b})$$

est valable pour $1 \leq p \leq n-1$

$$29) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{3k-n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2^3)^k \cdot 1^{n-k} = \frac{1}{2^n} (2^3 + 1)^n \quad (\text{C 640d})$$

$$= (9/2)^n$$

30) Soit (E) une équation d'inconnue x . On a : (C 713a)

$$(E) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5$$

Que peut-on dire en français de 3 et 5 ?

3 et 5 sont les seules solutions **possibles** de l'équation (E).

31) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 717b)

$$x > 3 \iff (x > 2 \text{ ET } x > 3)$$

32) Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction. Traduire avec quantificateurs : (C 1022d)

$$f \text{ ne s'annule jamais sur } I \iff \forall x \in I, f(x) \neq 0$$