

1 L'implication

Exemple : prenons la propositions suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9) \quad \text{qui intuitivement est : Vraie}$$

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 9$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9)$
5	V	V	V
2	F	F	V
-4	F	V	V

Considérons maintenant la proposition suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25) \quad \text{qui intuitivement est : Fausse}$$

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 25$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25)$
6	V	V	V
2	F	F	V
4	V	F	F
-6	F	V	V

On obtient donc la table de vérité suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque que si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de Q .

La seule chose à laquelle sert l'implication est la suivante :

Si $P \Rightarrow Q$ est **vraie** et si P est **vraie**,

alors Q est également **vraie**.

On dit que

Définition 1 : Condition nécessaire / suffisante

Si on a $P \Rightarrow Q$

P est une condition **suffisante** de Q

Q est une condition **nécessaire** de P

Par exemple : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Cette implication est toujours vraie (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

Si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$

Par contre, si $x \neq 0$, alors on ne peut rien dire sur le produit xy : on peut aussi bien avoir $xy = 0$ que $xy \neq 0$.

$(x = 0)$ est une condition suffisante de $(xy = 0)$

$(xy = 0)$ est une condition nécessaire de $(x = 0)$

Une implication est vraie si et seulement si P est fausse OU Q est vraie :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

1.1 Négation d'une implication

En appliquant les formule de Morgan, on obtient :

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

Une implication est fausse si le premier terme est vrai et que le deuxième ne l'est pas.

1.2 Contraposée

Reprenons l'exemple précédent : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Si on a : $xy \neq 0$, alors on peut affirmer que $x \neq 0$

On a donc : $(xy \neq 0) \Rightarrow (x \neq 0)$

C'est ce qu'on appelle la **contraposée** : $[p \Rightarrow q] \equiv [\neg q \Rightarrow \neg p]$

Exemples d'utilisation : par contraposée

$[x \in A \cap B \Rightarrow x \in A]$ devient : $[x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B]$

$[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$ devient $[x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A]$

1.3 Démonstration d'une implication : [$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$]

- Simple
Supposons $\mathcal{P}$
...
on a $\mathcal{Q}$
- Par contraposée
Montrons $\text{non-}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non-}\mathcal{P}$
Supposons $\text{non-}\mathcal{Q}$, (montrons $\text{non-}\mathcal{Q}$)
...
On a donc $\text{non-}\mathcal{P}$
Donc, par contraposée : [$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$]
- Par l'absurde
On suppose à la fois $\mathcal{P}$ et $\text{non-}\mathcal{Q}$ et on montre que c'est impossible :
Supposons $\mathcal{P}$ et $\text{non-}\mathcal{Q}$
...
Impossible
Donc [$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$]

1.4 Démonstration d'implications complexes

1. $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$

Supposons $P \text{ ou } Q$	
<u>1er cas : on a P</u> ... on a R	<u>2ème cas : on a Q</u> ... on a R
Dans tous les cas, on a R Donc $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$	

2. $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$

Supposons P On a $Q \text{ ou non-}Q$	
<u>1er cas : on a Q</u> on a alors $Q \text{ ou } R$	<u>2ème cas : on a $\text{non-}Q$</u> (cad Q est faux) ... on a R donc on a $Q \text{ ou } R$
Dans tous les cas : $Q \text{ ou } R$ Donc $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$	

1.5 Équivalence : [$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$]

On a : $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Ce qui donne le tableau de vérité suivant :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Pour démontrer une équivalence : [$p \Longleftrightarrow q$], il faut en général démontrer la double implication : [$p \Rightarrow q$] et [$q \Rightarrow p$]

Avoir :

$$[p \Longleftrightarrow q]$$

revient à dire que :

« p est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de q »

1.6 Existence et unicité

« Il existe un **unique** x vérifiant $\mathcal{P}(x)$. »

On décompose la démonstration en deux parties :

- l'existence (il en existe au moins un)
- et l'unicité (il en existe au plus un)

Comment traduire l'unicité ?

Elle signifie qu'on ne peut avoir deux éléments **distincts** x et y d'un ensemble A vérifiant $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$

On a donc :

$$\neg(\exists x \in A, \exists y \in A, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \neg(\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ou encore

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \neg[\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)] \text{ ou } (x = y)$$

On reconnaît là une implication (car : $(\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$)

Ce qui donne :

« **Unicité** »

« Au plus un élément de A vérifie $\mathcal{P}$ »

$$\iff \forall x \in A, \forall y \in A, [\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)] \Rightarrow (x = y)$$

Démonstration de l'« unicité » : « x tel que $\mathcal{P}(x)$ est unique (s'il existe) »

Soient x et y vérifiant $\mathcal{P}$

On a $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$

...

Alors a $x = y$

Donc, s'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$, alors x est unique

(ou encore : il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$)

ATTENTION

Pour montrer « Il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$ », il faut montrer deux choses :

1°) L'existence : il existe au moins un x tel que $\mathcal{P}(x)$.

2°) L'« unicité » : Il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$.

Autre méthode : par analyse-synthèse

1°) Analyse :

Supposons qu'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$

...

Alors $x = x_0$

Donc x_0 est la seule solution possible.

(Attention : cela ne prouve pas que x_0 est réellement solution. En effet, on a supposé au départ que x marchait.)

2°) Synthèse :

Montrons que x_0 vérifie la propriété P

...

On a bien $P(x_0)$

Exemple :

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application

Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$h = f + g$, f est paire et g est impaire.

2 Les ensembles

2.1 définitions d'ensembles

Définition d'un ensemble

- par extension :

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- ou par compréhension :

$$A = \{t \in \mathbb{R}, t^2 < 1\}$$

$$B = \{t \in \mathbb{R}, \exists x \in [-2, 1], t = 2x + 3\}$$

$$C = \{2x + 3, x \in [-2, 1]\}$$

$$D = \{x, 2x + 3 \in [-2, 1]\}$$

Donner sous forme d'intervalles les ensembles précédents

2.2 Opérations

Définition 2 : Opérations

- Intersection : $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- union : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- différence : $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
 $A \setminus B$ est appelé le complémentaire de B dans A
- Si on se place dans un « grand ensemble » Ω , on peut définir le complémentaire de A :

$$\overline{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\} = \Omega \setminus A$$

Définition 3 : Ensemble vide

$$A = \emptyset \iff \forall x, x \notin A$$

$$\iff \forall x, (x \in A \text{ est impossible})$$

Définition 4 : Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$

Définition 5 : inclusion, égalité

- $A \subset B \iff \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$
 $\iff \forall x \in A, x \in B$
 Quand $A \subset B$, on dit que A est un sous-ensemble de B ou bien que A est une partie de B
- $A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$

2.3 Démonstrations

• $x \notin A$

Pour démontrer $x \notin A$, il peut être intéressant de supposer que $x \in A$, et ensuite de montrer que cela est impossible

Montrons que $x \notin A$
 Par l'absurde : supposons $x \in A$
 ...
 Impossible
 Donc $x \notin A$

• $A \subset B$

Montrons $A \subset B$
 Soit $x \in A$ (montrons que $x \in B$)
 ...
 D'où $x \in B$
 Donc $A \subset B$

• $A = B$

On montre la double inclusion :

Montrons que $A \subset B$
 ...
 Montrons que $B \subset A$
 ...
 $A \subset B$ et $B \subset A$. Donc $A = B$.

• $A = \emptyset$

Soit $x \in A$
 ...
 Impossible
 Donc $A = \emptyset$