

- 1) Pour $-1 < a < 3$, Encadrer $A = a^2$ (C 060d)

$$-1 < a < 3 \Rightarrow -1 < a < 0 \text{ ou } 0 \leq a < 3$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } -1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \text{ car tout est négatif}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } 0 \leq a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9 \text{ car tout est positif}$$

$$\text{Dans tous les cas } \underline{0 \leq A < 9}$$

- 2) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 580c)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\text{En effet, } x^2 \geq 4 \iff (x \leq -2 \text{ OU } x \geq 2)$$

$$\text{Contre-exemple : } x = -3 : \quad x^2 \geq 2 \text{ est Vrai et } x \geq -2 \text{ est Faux}$$

- 3) $\tan(2\pi/3) = -\sqrt{3}$ (C 101d)

- 4) **Formules de linéarisation** : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ (C 121b)

- 5) $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\mathbf{i}.z) = \operatorname{Re}(z)$ (C 200b)

- 6) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z.\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ (C 210d)

- 7) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \arg(z) + \arg(z') = \arg(z.z') \quad [2\pi]$ (C 221b)

- 8) Formule d'Euler : $\sin(x) = \frac{e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}$ (C 235b)

- 9) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = -\mathbf{i} \iff e^z = e^{\mathbf{i}(-\pi/2 + 2k\pi)}$ (C 239d)

$$\iff \boxed{z = \mathbf{i} \left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}}$$

- 10) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi]$ (C 243)

$$\text{Pour } z = a + \mathbf{i}b, \quad e^z = e^a e^{\mathbf{i}b}$$

$$\Rightarrow \arg(e^z) = \arg(e^a) + \arg(e^{\mathbf{i}b}) = 0 + b = \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi]$$

- 11) Racines n -ièmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 251c)

$$\text{sont de la forme } z_k = \omega^k \text{ avec } \omega = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{n}} \text{ et } k \in [[0, n-1]]$$

- 12) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (E 351b)

$\vec{u}, \vec{w}$ deux vecteurs d'affixes non nulles z_u, z_w , l'angle orienté :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \arg(z_w) - \arg(z_u) = \arg\left(\frac{z_w}{z_u}\right) \quad [2\pi]$$

- 13) $A(a), B(b), C(c)$ sont alignés $\iff \frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$ (C 358a)

Explication : on doit avoir $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$

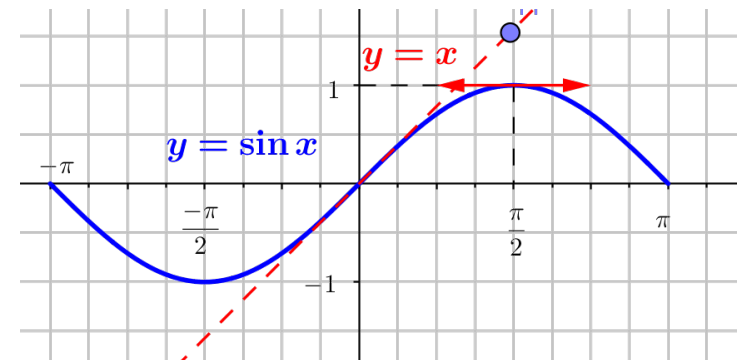
$$\iff (c-a) = k(b-a) \iff k = \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

N'importe quelle autre quotient convient aussi : $\frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$, etc.

- 14) $f(x) = \frac{3}{x^2+1} + e^2$ (C 422)

$$\text{Alors } f'(x) = 3 \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2} \quad (\text{avec } \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2})$$

- 15) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ (C 446a)



Tracer la tangente en 0 et donner son équation : $y = x$

La tangente doit passer par le point $(\pi/2, 1, 5)$ à peu de chose près

$$16) \sum_{k=1}^{n+1} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \quad (\text{C 506c})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k-1}) \quad \text{avec} \quad u_k = \sqrt{2k+1}$$

$$= u_{n+1} - u_1 = \sqrt{2n+3} - \sqrt{1} = \sqrt{2n+3} - \sqrt{1} \quad \text{par télescopage}$$

$$17) (u_n) \text{ géométrique de raison } q \neq 0 \quad (\text{C 515c})$$

$$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q} = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{pour } q \neq 1$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_{n+1} = u_p q^{n-p+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

$$18) \text{ Changement d'indice} \quad j = k + 1 \quad (\text{C 530a})$$

$$\Rightarrow k = j - 1 \quad \Rightarrow \quad 2k + 1 = 2j - 1 \quad \begin{cases} k = n & j = n + 1 \\ k = 1 & j = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n (2k+1)u_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} (2j-1)u_j$$

$$19) \text{ Vrai ou Faux ?... } \mathbf{Faux} \quad (\text{C 539c})$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Par exemple pour $n = 2$

$$\left(\sum_{k=1}^2 a_k \right) \left(\sum_{k=1}^2 b_k \right) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^2 a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{La vraie formule est :} \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_k$$

$$20) \text{ Définition : Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x] = y \quad (\text{C 600b})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y \leq x < y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y + \alpha \quad \text{avec } y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, 1[$$

$$21) \text{ Donner un encadrement décimal de } x \in \mathbb{R} \text{ à } 10^{-n} \text{ près :} \quad (\text{C 605b})$$

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Par exemple pour $x = \pi$ et $n = 2$ $10^2 \pi = 314,15 \dots$

$$\Rightarrow \lfloor 10^2 \pi \rfloor = 314 \Rightarrow \frac{\lfloor 10^2 \pi \rfloor}{10^2} = 3,14 \Rightarrow 3,14 \leq \pi < 3,15$$

$$22) \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \cdot \binom{n}{p} \quad \text{pour } 0 \leq p \leq n \quad (\text{C 629b})$$

$$23) (x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \quad (\text{C 636b})$$

24) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = -1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = -1 + (1+x)^n$ (C 640f)

25) Si $P \Rightarrow Q$ est FAUSSE (C 705b)
alors sa contraposée est : **Fausse**

(Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité)

26) Négation de $[(x > 2) \Rightarrow (x^2 = x)]$: $(x > 2) \underline{\text{ET}} (x^2 \neq x)$ (C 706)

27) Vrai ou Faux ? ... **Vrai** (C 724a)
 $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$

28) $x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ ET } x \notin B$ (C 742b)

29) La courbe C_f admet une asymptote verticale en a (C 1015a)
 $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

30) Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction. Traduire avec quantificateurs : (C 1025a)
32 n'a pas d'antécédent par f dans $I \iff \forall x \in I, f(x) \neq 32$