

Professeur : SERVAIN Classe : PCSI Durée minimale : 1 h 30 Matériel autorisé : Rien (Pas de calculatrice)	Discipline : Maths Durée de l'épreuve : 1 h 30
--	---

Attention :

- Marge droite de 2 cm
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Exercice 1 Calcul d'un cosinus

L'objectif de ce problème est de présenter différentes démarches menant à l'expression par radicaux de $\cos(\pi/5)$.

Par commodité, nous poserons $\theta = \pi/5$

1. Préliminaire

Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $C(\varphi, n) = \sum_{k=0}^n \cos(k\varphi)$

(On donnera une expression réelle du résultat.)

Attention : Les questions 2, 3, 4 et 5 doivent être traitées de façon **totale**ment **indépendante**, puisqu'on veut retrouver un même résultat de 4 façons différentes.

2. a) Résoudre l'équation $z^5 + 1 = 0$ en exprimant ses solutions sous forme trigonométrique

b) Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que

$$z^5 + 1 = (z + 1)Q(z)$$

c) Pour $z \neq 0$, déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

$$\frac{Q(z)}{z^2} = P(Z) \quad \text{avec} \quad Z = z + \frac{1}{z}$$

(On pourra poser $P(Z) = aZ^2 + bZ + c$ puis déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$)

d) En déduire les solutions de l'équation $Q(z) = 0$

e) Déterminer enfin l'expression par radicaux de $\cos \theta$.

(c'est-à-dire écrire $\cos \theta$ sous la forme $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$)

3. a) En utilisant les exponentielles complexes, calculer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$

b) En déduire que $\cos \theta$ est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$

c) Résoudre celle-ci en commençant par observer l'existence de solutions « évidentes » (-1 et 1/2)

Conclure.

4. a) Montrer que $\cos \theta + \cos 3\theta = \frac{1}{2}$

b) Montrer que $\cos \theta \cos 3\theta = \frac{-1}{4}$

c) En déduire la valeur de $\cos \theta$

5. a) En utilisant le préliminaire, calculer

$$1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta$$

b) En déduire que $\cos \theta$ est solution d'une équation du second degré. Conclure.