

Professeur : SERVAIN Classe : PCSI Durée minimale : 3 h	Discipline : Maths Durée de l'épreuve : 3 h Matériel autorisé : Rien (Pas de calculatrice)
--	---

Attention :

- **Marge droite de 2 cm**
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

1 Exercices

Consigne :

Après chaque Exercice, on changera de page (mais pas nécessairement de feuille. C'est-à-dire que chaque Exercice démarrera en haut de la feuille. On indiquera à chaque fois clairement le numéro de l'exercice.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x + 1| - |2 - x| \leq 3$

2) Mettre sous forme trigonométrique $z = \frac{\cos a - \mathbf{i} \sin a}{\sin a - \mathbf{i} \cos a}$

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(x^2 + 3x + 1)(-2x^2 + x + 1) \geq 0$$

4) a) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2k} 3^{n-3k}$

b) Vérifier la formule obtenue pour $n = 2$

5) Calculer, pour $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

(On donnera une expression finale ne dépendant que de fonctions réelles)

6) Mettre sous forme exponentielle $B = (-\sqrt{3} - \mathbf{i})^7$

En déduire l'écriture algébrique de B

7) Linéariser l'expression suivante en utilisant les exponentielles complexes :

$$C = \sin^3(x) \cos(x) \quad (\text{Méthode standard})$$

8) Soit l'équation $2 \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)**

Déterminer les couples $(\cos x, \sin x)$ solutions de **(E)**

9) Exprimer $A = \sin(4\theta)$ en fonction de $\sin \theta$ et $\cos \theta$
en utilisant les exponentielles complexes

2 Problème : Formule d'inversion de Pascal

Consigne : Commencer sur une nouvelle feuille

Rappel : on peut admettre le résultat de certaines questions pour répondre aux suivantes

L'objectif de l'exercice est de démontrer la *formule d'inversion de Pascal* :

Si $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des réels tels que

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad a_p = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b_k \quad \mathbf{E1}$$

alors on a

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad b_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k \quad \mathbf{E2}$$

1. Exploration

- Ecrire les relations de **(E1)** pour $p = 1, p = 2, p = 3$
- En déduire les expressions de b_1, b_2, b_3 en fonctions de a_1, a_2, a_3
- Vérifier alors les relations de **(E2)** pour $p = 1, p = 2, p = 3$

2. Préliminaires

- Énoncer la formule du binôme de Newton.
- En déduire qu'on a, pour tout entier $\ell \geq 1$, $\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$

3. Un lemme

Pour deux entiers $q \leq p$, on pose $S_{q,p} = \sum_{k=q}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q}$

- Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $q \leq k \leq p$, on a

$$\binom{p}{k} \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \binom{p-q}{k-q}$$

- En déduire que, pour tout entier p et tout entier $q < p$, on a

$$S_{q,p} = 0$$

- Que vaut $S_{q,p}$ pour $q = p$?

4. Démonstration de la formule d'inversion

- Justifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \binom{k}{i} b_i$$

- Ici $f(i,k)$ est une expression pouvant comporter les variables i et k . Renseignez les « ? » (aucune justification n'est demandée) :

$$\sum_{1 \leq i \leq k \leq p} f(i,k) = \sum_{i=?}^? \sum_{k=?}^? f(i,k).$$

- Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal.