1 Nombres complexes

Définition 1 : nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous **forme algébrique** $z = a + b.\mathbf{i}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{i}$ un nombre tel que $\mathbf{i}^2 = -1$

a est appelé la **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire** ;

On note : $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$

- Si $\text{Im}(z) = 0$, alors z est réel
- Si $\text{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $\boxed{z \in \mathbf{i}.\mathbb{R}}$

Propriété 1 : Égalité

$z_1 = z_2 \iff \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ et $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$

Propriété 2 : Parties réelles, imaginaires

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\text{Re}(a.z_1 + b.z_2) = a.\text{Re}(z_1) + b.\text{Re}(z_2)$$
$$\text{Im}(a.z_1 + b.z_2) = a.\text{Im}(z_1) + b.\text{Im}(z_2)$$

En particulier

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$$
$$\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2)$$

Attention : ça ne marche pas pour le produit complexe :

$\text{Re}(z_1 z_2) \neq \text{Re}(z_1).\text{Re}(z_2)$

Définition 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

Soit $z = a + b.\mathbf{i}$ un nombre complexe.

- On dit qu'un point M du plan a pour affixe z s'il a pour coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. On note alors $M(z)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe s s'il a pour coordonnées(a,b) dans le même repère c'est-à-dire : $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$
  On note $\vec{u}(z)$

Interprétation géométrique : somme, produit par un réel.

2 Conjugué

Définition 3 : Conjugué

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{z} = \overline{a + \mathbf{i}.b} = a - \mathbf{i}.b$

Interprétation géométrique

Propriété 3 : Compatibilité avec les opérations

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$

- $\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad \overline{a.z + b.z'} = a.\overline{z} + b.\overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ $\qquad$ Pour $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Propriété 4 : parties imaginaires, réelles

$\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ $\qquad \text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}$

$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

$z \in \mathbf{i}.\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

3 Module

Définition 4 : Module

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Conséquence : $z\overline{z} = |z|^2$

Propriété 5

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a + \mathbf{i}.b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriété 6 : Interprétation géométrique

Si $M(z)$, alors $|z| = OM$

Si $\vec{u}(z)$ alors $|z| = \|\vec{u}\|$

Si $A(a)$ et $B(b)$ alors $|b-a| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

Propriété 7 : compatibilité avec les opérations

$z = 0 \iff |z| = 0$

$|\overline{z}| = |z| \qquad |z.z'| = |z|.|z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$

Attention : marche pas bien avec somme et différence

Propriété 8 : Inverse

Si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propriété 9 : Double inégalité triangulaire

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad \big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$

Propriété 10 : Cas d'égalité

$|z+z'| = |z| + |z'|$

$\iff z' = 0$ ou $z' = \alpha.z$ avec α réel positif

Interprétation géométrique

Démonstration

1) Montrons d'abord $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

§ Procédons par équivalence :
Le deux termes de l'inégalité sont positifs, donc

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$\iff |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

$\iff (z+z')(\overline{z+z'}) \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$

$\iff (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$

$\iff z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \leq z\overline{z} + 2|z||z'| + z'\overline{z'}$

$\iff z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq 2|z||z'|$

$\iff z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} \leq 2|z||\overline{z'}|$

$\iff 2.\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq 2|z\overline{z'}|$

$\iff \mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$

§ Posons $Z = z\overline{z'} = a + \mathbf{i}b$ avec $a,b \in \mathbb{R}$

et montrons que $\mathrm{Re}(Z) \leq |Z|$

On a $|Z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$ et $|a| \geq a$
D'où $|Z| \geq \mathrm{Re}(Z)$
Et donc $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$

Ce qui prouve l'inégalité

2) Profitons-en pour déterminer le cas d'égalité : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
D'après ce qui précède :

$|z+z'| = |z| + |z'|$

$\iff |Z| = \mathrm{Re}(Z)$

$\iff \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2}$ et $|a| = a$

$\iff b = 0$ et $a \geq 0$

$\Rightarrow z\overline{z'} = a \in \mathbb{R}^+$

- Premier cas : $z' = 0$
- Deuxième cas : $z' \neq 0$

  Alors $z\overline{z'} = a$

  $\Rightarrow z = \frac{a}{\overline{z'}} = \frac{a.z'}{\overline{z'}.z'} = \frac{a}{|z'|^2}z' = \alpha.z'$ avec $\alpha = \frac{a}{|z'|^2} \geq 0$

(Remarque : on a raisonné par **implication**. Il faut donc vérifier la **réciproque** :

- Premier cas : $z' = 0$.
  alors trivialement $|z+z'| = |z| = |z| + |z'|$

- Deuxième cas : $z = \alpha.z'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$

  Alors
  $|z+z'| = |\alpha z' + z'| = |(\alpha+1)z'| = (\alpha+1)|z'|$ car $1+\alpha \geq 0$
  $= \alpha|z'| + |z'| = |\alpha.z'| + |z'|$ car $\alpha \geq 0$
  $= |z| + |z'|$

  Dans les deux cas cela marche.

3) Il reste à montrer l'inégalité de gauche : $\big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'|$

$|z| - |z'|$ et $|z+z'|$ sont deux réels
Or, pour $A \in \mathbb{R}$ et $B \geq 0$

$|A| \leq B$
$\iff \max(A, -A) \leq B$
$\iff A \leq B$ et $-A \leq B$

Donc
$\big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'|$
$\iff |z| - |z'| \leq |z+z'|$ et $|z'| - |z| \leq |z+z'|$
$\iff |z| \leq |z+z'| + |z'|$ et $|z'| \leq |z+z'| + |z|$

Or
$|z| = |(z+z') + (-z')| \leq |z+z'| + |-z'|$ (inégalité triangulaire)
$\Rightarrow |z| \leq |z+z'| + |z'|$ car $|-z'| = |z'|$

Cette inégalité est vraie pour tous z,$z' \in C$
On peut donc échanger z et z' :

$|z'| \leq |z+z'| + |z|$

On a bien obtenu les deux inégalités voulues. CQFD

fin demo

4 Nombre complexes de module 1

Définition 5 : ensemble des complexe de module 1

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Propriété 11 :Angle

A tout point du cercle $\mathbb{U}$ correspond un angle θ, défini modulo 2π, tel que $M(\cos(\theta),\ \sin(\theta))$

Propriété 12 : Argument

Tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit $z = \cos(\theta) + \mathbf{i}.\sin(\theta)$

où θ est appelé **un argument** de z et est noté $\arg(z)$

Géometrie : angle θ
Complexe : argument θ

Définition 6 : notation exponentielle

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}.\sin(\theta)$

Propriété 13 opérations

- $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.0} = 1$ $\quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi} = -1$ $\quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/2} = \mathbf{i}$
- $\overline{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ $\quad \left|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right| = 1$
- $\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}$ $\quad \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}}$

  $\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1-\theta_2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta} = [\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n$

Démonstration Les premières propriétés sont triviales

- Montrons que $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}.\mathrm{e}^{\mathbf{i}y} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+y)}$ **(1)**

$\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}.\mathrm{e}^{\mathbf{i}y} = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$ par définition
$= \cos x\cos y + \mathbf{i}\sin x\cos y) + \mathbf{i}\cos x\sin y + \mathbf{i}^2\sin x\sin y$
$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + \mathbf{i}(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$
$= \cos(x+y) + \mathbf{i}\sin(x+y) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+y)}$ par définition

- D'après cette propriété on a :

$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}.\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta)} = \mathrm{e}^{i.0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}}$ **(2)**

- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}$ d'après **(2)**
  $= e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ d'après **(1)**

- Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$
  On commence par le démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

  § Initialisation : pour $n = 0$,
  $e^{in\theta} = e^{i0} = 1$ et $[e^{i\theta}]^n = [e^{i\theta}]^0 = 1$
  Vrai pour $n = 0$

  § Hérédité : supposons la relation vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné
  On a : $e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$ (H.R.)
  $e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{in\theta}e^{i\theta}$ d'après **(1)**
  $= [e^{i\theta}]^n e^{i\theta}$ d'après **H.R**
  $= [e^{i\theta}]^{n+1}$
  La relation est vraie au rang $n+1$

  § Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{in\theta} = [e^{i\theta}]^n$ **(3)**

  Il reste à la démontrer pour $n < 0$:
  Soit $n \in \mathbb{Z}^-$. On a $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Donc
  $e^{in\theta} = e^{-ip\theta} = \dfrac{1}{e^{ip\theta}}$ d'après **(2)**
  $= \dfrac{1}{[e^{i\theta}]^p}$ d'après **(3)** car $p \in \mathbb{N}$
  $= [e^{i\theta}]^{-p} = [e^{i\theta}]^n$
  Conclusion : La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ CQFD

fin demo

4.1 Formules d'Euler

Propriété 14

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

ou encore

Propriété 15

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$$

Démonstration En effet, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\Rightarrow \quad \cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \dfrac{e^{ix}+\overline{e^{ix}}}{2} = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Et $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \dfrac{e^{ix}-\overline{e^{ix}}}{2i} = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ CQFD

fin demo

Applications :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ $\qquad e^{ia}+e^{ib}$ $\qquad 1-e^{-ia}$ etc.
- Linéarisation : $\cos^3 x.\sin x$

Solutions

- $\boxed{e^{ia}+e^{ib}}$

  On met en facteur « l'angle milieu ». Ici c'est $e^{i\frac{a+b}{2}}$
  Méthode bourrin (mais efficace) :
  $e^{ia}+e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\cdot\dfrac{e^{ia}+e^{ib}}{e^{i\frac{a+b}{2}}}$
  $= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(\dfrac{e^{ia}}{e^{i\frac{a+b}{2}}}+\dfrac{e^{ib}}{e^{i\frac{a+b}{2}}}\right)$
  $= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{ia-i\frac{a+b}{2}}+e^{ib-i\frac{a+b}{2}}\right)$
  $= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{-a+b}{2}}\right)$

$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}.2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Remarque : la factorisation peut se faire « à la volée » en sautant les trois premières étapes.

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}a}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdots}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdots})$$

- $1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}$

$1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}=\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}$

On met en facteur l'angle milieu, ici $-a/2$

$1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}\left(\mathrm{e}^{+\mathbf{i}a/2}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}\right)$ avec $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}=2\mathbf{i}\sin x$

$= \mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}.2\mathbf{i}.\sin(a/2)$

- $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et sa soeur jumelle : $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

On a $\cos(kx)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx})$

Donc $C_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx})$

Et comme $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$

On peut écrire :

$$C_n=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx}\right)=\mathrm{Re}(\sigma_n) \quad \text{avec} \quad \sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx}$$

Remarque

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx}=\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+\mathbf{i}\sin(kx))\\&=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+\mathbf{i}\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\\&=C_n+\mathbf{i}S_n\end{aligned}$$

et donc $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\mathrm{Im}(\sigma_n)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}kx}\right)$

(Reprenons nos calculs :)

Calcul de σ_n

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.kx}=\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}$

Or $\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $\underline{q\neq 1}$

Et $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}=1 \iff x=0+2k\pi$

Il faut donc distinguer 2 cas :

§ $\underline{1^{\text{er}}\text{ cas :}}$ $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}=1 \iff x=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Alors

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}1^k=n+1$$

$\Rightarrow \quad C_n=\mathrm{Re}(\sigma_n)=n+1$

et $S_n=\mathrm{Im}(\sigma_n)=0$

§ $\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas :}}$ $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}\neq 1 \iff x\neq 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Alors

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k\\&=\frac{1-(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}}\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.(n+1)x/2}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.x/2}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2-\mathbf{i}x/2} \cdot \frac{-2\mathbf{i}.\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2\mathbf{i}.\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2} \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

D'où

$$C_n = \mathrm{Re}(\sigma_n)$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2})$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}\cos\frac{n.x}{2}$$

Remarque : Cette méthode donne aussi, sans autre calcul, la valeur de S_n :

Si $x = 0 \quad [2\pi] \quad S_n = 0$

Si $x \neq 0 \quad [2\pi] \quad S_n = ?$

$$S_n = \mathrm{Im}(\sigma_n) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2}) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}\sin\frac{n.x}{2}$$

- Linéarisation : $\cos^3 x.\sin x$

$$\cos^3 x.\sin x$$
$$= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right)^3\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^3\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\left((\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^3+3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^2(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})+3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^2+(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^3\right)\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$
(binôme de Newton)
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathbf{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathbf{i}x} & +3\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & +3\mathrm{e}^{0x} & +\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & \\ & -\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & -3\mathrm{e}^{0x} & -3\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & -\mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x}\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathbf{i}x} & +2\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & & -2\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & -\mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x}\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\left((\mathrm{e}^{4\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x})+2(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x})\right)$$
$$= \frac{1}{16\mathbf{i}}\left(2.\mathbf{i}\sin 4x+4\mathbf{i}.\sin 2x\right)$$
$$= \frac{1}{8}(\sin 4x+2\sin 2x)$$

Vérifications :

- Pour $x = \pi/4$,
$$\cos^3(x)\ \sin(x) = (\sqrt{2}/2)^3(\sqrt{2}/2) = 1/4$$
$$(\sin 4x+2\sin 2x)/8 = (\sin\pi+2\sin\pi/2)/8 = 2/8$$
- Pour $x = \pi/3$
$$\cos^3(x)\ \sin(x) = (1/2)^3(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/16$$
$$(\sin 4x+2\sin 2x)/8 = (\sin 4\pi/3+2\sin 2\pi/3)/8$$
$$= (-\sqrt{3}/2+2\sqrt{3}/2)/8 = (\sqrt{3}/2)/8$$

Ça a l'air de tenir la route

4.2 Formule de Moivre

Propriété 16

$\|$ $(\cos\theta+\mathbf{i}.\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+\mathbf{i}.\sin(n\theta)$

Application : Calcul de $\cos(3x)$, $\sin(3x)$ en fonction $\sin x$, $\cos x$

Solution :

$$\cos(3x)+\mathbf{i}.\sin(3x) = \mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}$$
$$= (\cos x+\mathbf{i}\sin x)^3$$
$$= (\cos x)^3+3(\cos x)^2(\mathbf{i}\sin x)+3(\cos x)(\mathbf{i}\sin x)^2+(\mathbf{i}\sin x)^3$$
$$= \cos^3 x+\mathbf{i}.3\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-\mathbf{i}.\sin^3 x$$

$\Rightarrow \quad \cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}) = \cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$

et $\quad \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}) = 3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$

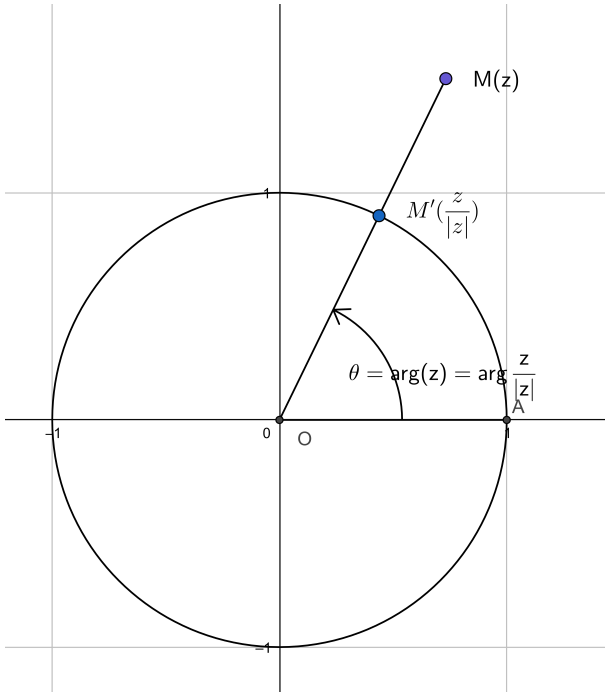
5 Argument

Propriété 17

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. alors $z/|z| \in \mathbb{U}$

En effet, $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$

Interprétation géométrique :



Définition 7 : Argument

Soit $z \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = |z|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$

θ est appelé un argument de z et on note $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$

Attention : un argument est toujours défini modulo 2π

Exemples : donner les arguments des nombres complexes suivants :

$z_1 = \mathbf{i}$, $z_2 = -3$, $z_3 = -\sqrt{3}\,\mathbf{i}$ $z_4 = 1 + \mathbf{i}$,$z_5 = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$

Correction

- $\arg(\mathbf{i}) = \pi/2$ $[2\pi]$
- $\arg(-3) = \pi$ $[2\pi]$
- $\arg(-\sqrt{3}\,\mathbf{i}) = 3\pi/2$ $[2\pi]$
- $\arg(1+\mathbf{i}) = ?$

  $|z_4| = |1+\mathbf{i}| = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $z_4 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi/4}$

  $\Rightarrow$ $\arg(z_4) = \pi/4$ $[\pi]$
- $z_5 = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$

  $|z_5| = 2$ $\Rightarrow$ $z_5 = 2\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/3}$

  $\Rightarrow$ $arg(z_5) = \pi/3$ $[2\pi]$

Propriété 18 : Valeurs particulières

a) $\arg(z) = 0$ $[2\pi]$ $\iff$ z réel positif

b) $\arg(z) = \pi$ $[2\pi]$ $\iff$ z réel négatif

c) $\arg(z) = \pi$ $[\pi]$ $\iff$ z réel (positif ou négatif)

d) z imaginaire pur $\iff$ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$

Propriété 19 : opérations

- $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ $[2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z)$ $[2\pi]$
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ $[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n.\arg(z)$ $[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$
- $\arg(a.z) = \begin{cases} \arg(z) \quad [2\pi] & \text{si} \quad a > 0 \\ \arg(z) + \pi \quad [2\pi] & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$

$\arg(-z) = ?$

Définition 8 : forme exponentielle

Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme exponentielle :

$z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$

Propriété 20 : Égalité par module et argument

Soient z_1,z_2 deux complexes non nuls

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \quad [2\pi] \end{cases}$$

6 Exponentielle complexe

Définition 9 : Exponentielle complexe

- Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$e^{a+\mathbf{i}.b} = e^a e^{ib} = e^a\big(\cos(b) + \mathbf{i}.\sin(b)\big)$$
- Pour $z \in \mathbb{C}$,
$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + \mathbf{i}.\sin(\mathrm{Im}(z))\big)$$

Remarque : pour en arriver là, on a procédé par étapes successives :

- La fonction exponentielle est déjà connue sur $\mathbb{R}$
- Sur $\mathbf{i}.\mathbb{R}$, on a défini $e^{i\theta}$
- Enfin, on définit maintenant l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier

Propriété 21 : Opérations

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \quad e^{n.z} = (e^z)^n,\ n \in \mathbb{Z}$$
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) \quad [2\pi]$$

Démonstration Pour $z = a + \mathbf{i}.b$ avec a,$b \in \mathbb{R}^2$ Par exemple :

- $\overline{e^z} = \overline{e^{a+\mathbf{i}.b}} = \overline{e^a.e^{\mathbf{i}.b}} = \overline{e^a}.\overline{e^{\mathbf{i}.b}} = e^a.e^{-\mathbf{i}.b} = e^{a-\mathbf{i}.b} = e^{\overline{z}}$
- $|e^z| = |\ e^{a+\mathbf{i}.b}\ | = |\ e^a.e^{\mathbf{i}.b}\ | = |\ e^a\ |\ |\ e^{\mathbf{i}.b}\ | = e^a \times 1 = e^{\mathrm{Re}(z)}$
- $\arg(e^z) = \arg(e^a.e^{\mathbf{i}.b}) = \arg(e^a) + \arg(e^{\mathbf{i}.b}) = 0 + b = \mathrm{Im}(z) \quad [2\pi]$

fin demo

Propriété 22 : Égalité

$$e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = 1$$
$$\iff z' - z = \mathbf{i}.2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \quad [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration

$$e^z = e^{z'}$$
$$\iff |e^z| = |e^{z'}| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(e^{z'}) + 2k\pi$$
$$\iff e^{\mathrm{Re}(z')} = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z') = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \quad [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff z' = z + \mathbf{i}.2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

fin demo

Propriété 23 : Équation $e^z = a$, $a \in \mathbb{C}$

Soit l'équation $e^z = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

- Si $a = 0$, n'admet pas de solution
- Si $a \neq 0$, admet une infinité de solutions de la forme
$$z = \ln(|a|) + \mathbf{i}(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z')} > 0$ Donc $e^z = 0$ est impossible
- Pour $a \in \mathbb{C}^*$
$$e^z = a$$
$$\iff |e^z| = |a| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(a) + 2k\pi$$
$$\iff e^{\mathrm{Re}(z)} = |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \arg(a) + 2k\pi$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln|a| \\ \mathrm{Im}(z) = \arg(a) \quad [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff z = \ln(|a|) + \mathbf{i}(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

fin demo

7 Géométrie

7.1 Interprétations géométriques

- $z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- $|z_M| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$
- $|z_B - z_A| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
- $\arg(z_u) = (\vec{i}, \vec{u}) \quad [2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u}) = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \arg \dfrac{z_v}{z_u} \quad [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z(\overrightarrow{AC})}{z(\overrightarrow{AB})}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$

7.2 propriétés géométriques (non exhaustives)

- Cercle de centre $A(z_A)$ et rayon $r > 0$:

  $M(z) \in C(A,r) \iff AM = r$

  $\iff |z - z_A| = r \iff (z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_A}) = r^2$

- Colinéarité : Pour $u \neq 0$, $v \neq 0$

  u,v colinéaires

  $\iff u = kv$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

  $\iff \dfrac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}^* \iff \dfrac{\overline{z_v}}{\overline{z_u}} = \dfrac{z_v}{z_u} \iff \arg\dfrac{z_v}{z_u} = 0 \quad [\pi]$

- Alignement : Pour A, B, C distincts,

  A, B, C alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

  $\iff \dfrac{z(\overrightarrow{AB})}{z(\overrightarrow{AC})} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\overline{z_B} - \overline{z_A}}{\overline{z_C} - \overline{z_A}}$

- perpendicularité :

  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arg\dfrac{z_v}{z_u} = \pi/2 \quad [\pi]$

  $\iff \dfrac{z_v}{z_u} \in \mathbf{i}.\mathbb{R} \iff \dfrac{\overline{z_v}}{\overline{z_u}} + \dfrac{z_v}{z_u} = 0$

8 Second degré

8.1 Équation du second degré

Propriété 25 : Solutions des équations du second degré

Soit l'équation $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $(b, c) \in \mathbb{C}^2$

On note $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ le discriminant de cette équation

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $Q(z) = a(z - z_0)^2$
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes
  $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$
  Et $Q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Démonstration

On met le polynôme sous forme canonique :

$$\begin{aligned} Q(z) &= az^2 + bz + c \\ &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \end{aligned}$$

On veut faire apparaitre le début d'un carré : $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

$$\begin{aligned} Q(z) &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \end{aligned}$$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \Delta = b^2-4ac$$
$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$$
$$= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)$$
$$= a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)$$
$$= a\,(z-z_1)\,(z-z_2)$$

avec $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ qui sont les deux racines de Q

Dans le cas où $\Delta = 0$,

les deux racines sont égales à $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $Q(z) = a(z-z_0)^2$ CQFD

fin demo

Propriété 26 : Produit et somme des racines

Si z_1 et z_2 sont les racines du polynômes $Q(z) = az^2+bz+c = 0$ (avec $z_1 = z_2$ dans le cas de la racine double),

alors $P = z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$, $S = z_1+z_2 = \dfrac{-b}{a}$

Démonstration

On revient à la forme factorisée :

$$Q(z) = a(z-z_1)(z-z_2) = a(z^2 - z_1z - z_2z + z_1z_2)$$
$$= az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2$$

Par identification avec $Q(z) = az^2+bz+c$

On a $-a(z_1+z_2) = b$ et $az_1z_2 = c$ Ce qui donne les formules voulues.

fin demo

Propriété 27 : Solutions des sommes et produits

Les solutions du système $\begin{cases} z_1z_2 = P \\ z_1+z_2 = S \end{cases}$ sont les couples $(z_1,\, z_2)$ solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

Démonstration

$(z_1,\, z_2)$ sont les solutions de l'équation $(z-z_1)(z-z_2) = 0$

avec $(z-z_1)(z-z_2) = z^2 - (z_1+z_2).z + z_1.z_2 = z^2 - s.z + p$

Donc $(z_1,\, z_2)$ sont les solutions de l'équation $z^2 - s.z + p = 0$

fin demo

8.2 Racines carrées d'un complexe

Soit $z = a + \mathbf{i}.b$ On cherche $\delta = x + \mathbf{i}.y$ tel que $\delta^2 = z$

$\iff$ $a + \mathbf{i}.b = (x^2-y^2) + \mathbf{i}.2xy$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

De plus : $|z| = |\delta|^2 \iff x^2+y^2 = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (3)

En faisant (1) + (3), on obtient x^2 et donc les deux valeurs opposées de x.
En faisant (3) + (1), on obtient y^2 et donc les deux valeurs opposées de y.
En utilisant l'équation (2), on trouve le signe de xy et donc les deux couples (x,y) solutions.

Et cela donne les solutions δ_1 et $\delta_2 = -\delta_1$

Exemples : Trouver les racines carrées de $2+\mathbf{i}$ puis de $1-3\mathbf{i}$

Cherchons $\delta = x + \mathbf{i}.y$ tel que $\delta^2 = 2+\mathbf{i}$

$\iff$ $(x+\mathbf{i}.y)^2 = 2+\mathbf{i}$ $\iff$ $x^2-y^2+\mathbf{i}.2xy = 2+\mathbf{i}$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 2 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$$

D'autre part $(x+\mathbf{i}.y)^2 = 2+\mathbf{i} \Rightarrow |x+\mathbf{i}.y|^2 = |2+\mathbf{i}|$

$\iff$ $x^2+y^2 = \sqrt{5}$ (3)

(1)+(3)$\Rightarrow 2x^2 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$ ou $x = \dfrac{-\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$

(3)-(1) $\Rightarrow \quad 2y^2 = \sqrt{5}-2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{2\sqrt{5}-4}{4}$

$\Rightarrow y = \dfrac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$ ou $y = \dfrac{-\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$

Enfin, (2) $\Rightarrow \quad 2xy = 1 \quad \Rightarrow \quad xy > 0$

Donc les seules solutions possibles sont :

$$\delta_1 = \frac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} + \mathbf{i}\frac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\delta_1$$

9 Racines n$^{\text{èmes}}$

Définition 11 : Racines $n^{\text{ièmes}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z si et seulement si $\quad z^n = Z$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si et seulement si $\quad z^n = 1$

On notera $\quad \mathbb{U}_n \quad$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Propriété 28 : Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

L'équation $\quad z^n = 1 \quad$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont de la forme

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,\ \ldots, n-1\} \quad (\text{ou } k \in \{1,\ \ldots, n\})$$

On a donc $\quad \mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} / k \in [[0, n-1]]\right\}$

Démonstration

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z^n| = |1| \\ \arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'une part,

$$|z^n| = |1| \iff |z|^n = 1 \iff |z| = 1 \quad \text{car on est dans } \mathbb{R}^+$$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi]$$

$$\iff \quad n\arg(z) = 0 + 2k\pi$$

$$\iff \quad \arg z = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg z = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$\iff \quad z = z_k \quad \text{avec} \quad z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}$$

Enfin, pour $k = n$, on retrouve $\quad z_n = z_0$

Il suffit donc de prendre les valeurs de k dans$[[0; n-1]]$, ce qui donne bien n racines distinctes.

fin demo

Propriété 29

Les racines de l'unité s'écrivent aussi

$$z_k = (\omega)^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{n}} = z_1$$

Propriété 30 : Racine n$^{\text{ièmes}}$ de z

Soit $\quad Z = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 0 \quad (\text{avec } R > 0)$

Alors l'équation $\quad z^n = Z \quad$ admet n solutions distinctes qui s'écrivent

$$\begin{aligned} z_k &= R^{1/n}\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,\ \ldots, n-1\} \\ &= R^{1/n}\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta/n}\omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/n} \end{aligned}$$

Démonstration $\qquad z^n = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = Z$

$$\iff \begin{cases} |z^n| = |Z| \\ \arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'une part,

$$|z^n| = |Z| \iff |z|^n = R \iff |z| = \sqrt[n]{R} = R^{1/n} \quad \text{car on est dans } \mathbb{R}^+$$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi]$$

$$\iff \quad n\arg(z) = \theta + 2k\pi$$

$$\iff \quad \arg z = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$\begin{aligned} & z^n = 1 \\ \iff & \begin{cases} |z| = R^{1/n} \\ \arg z = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\ \iff & z = z_k \quad \text{avec} \\ & z_k = R^{1/n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \\ & \quad = R^{1/n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{n}} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} \\ & \quad = R^{1/n}\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta/n}\ \omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/n} \end{aligned}$$

fin demo