1) $\ln(a-b) = \quad \emptyset$ (C 030c)

2) Dans $\mathbb{R}$ $\quad -2 < |x| < 4 \quad \iff \quad -4 < x < 4$ (C 574b)

3) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 581d)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 4$

4) Soit $(s,\, p) \in \mathbb{C}^2 \qquad \forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \begin{cases} z_1+z_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$ (C 331)

$\iff$ $(z_1,\, z_2)$ sont les racines du polynôme $\quad Q(x) = x^2 - sx + p$

En effet : $\quad Q(x) = (x-z_1)(x-z_2) = x^2 - (z_1+z_2)x + z_1 z_2 = x^2 - sx + p$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ -\sin(x) = \quad \sin(-x) = \sin(\pi + x)$ (C 110c)

6) $\sin x < 1/2 \quad \iff \quad 5\pi/6 + 2k\pi < x < 13\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

($\iff \quad -7\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$

$\iff \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]5\pi/6 + 2k\pi < x < 13\pi/6 + 2k\pi[$) (C 163a)

7) En utilisant le conjugué : $\quad z \in \mathbb{R} \quad \iff \quad z = \overline{z}$ (C 206a)

8) $\forall z,\, z' \in \mathbb{C}, \quad |z|.|z'| = \quad |z.z'|$ (C 216b)

9) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \arg\left(\mathbf{i}.z\right) = \arg\left(z\right) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ (C 227b)

En effet, $\quad \arg\left(\mathbf{i}.z\right) = \arg\left(\mathbf{i}\right) + \arg\left(z\right) = \arg\left(z\right) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

10) $\mathrm{e}^{\mathbf{i}a} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}b} = \quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{b-a}{2}}\right) = \quad 2\mathbf{i}\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}} \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (C 238b)

11) Définition : (Écrire avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$) (C 240c)

Pour $t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{(-2+5\mathbf{i})t} = \mathrm{e}^{-2t}(\cos 5t + \mathbf{i} \sin 5t)$

12) Racines n-ièmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 251a)

$z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} \quad$ avec $\quad k \in [[0,\, n-1]]$

13) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\, \vec{j})$ (C 351a)

Interprétation géométrique : $\quad \arg(z_u) = (\vec{i},\, \vec{u}) \quad [2\pi]$

14) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\, \vec{j})$. (C 356e)

Soient $\quad \vec{u},\, \vec{w} \quad$ deux vecteurs d'affixes $\quad z_u,\, z_w \quad$ non nulles. Alors :

(u,w) sont colinéaires de même sens $\quad \iff \quad \frac{z_w}{z_u} \in \mathbb{R}_+^*$

15) Dans $\mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x^2)$ (C 420)

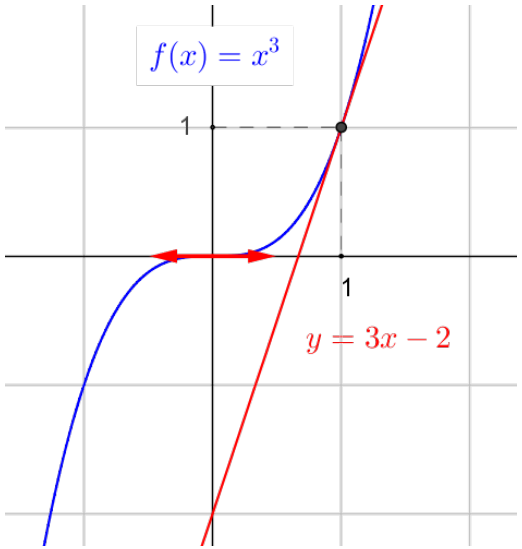
$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot \left(x^2\right)' = -2x \sin(x^2)$

16) $f(x) = x^x$: Domaine de déf et dérivée ? (C 426)

$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \quad$ pour $\quad x \in]0, +\infty[$

$f'(x) = (x \ln x)' \mathrm{e}^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x$

17) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto x^3$ (C 442)



Remarque : faire apparaître la tangente horizontale

18) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k=1}^{n}(-a_k + a_{k-1})$

$= (a_{n+1} - a_1) + (-a_n + a_0)$ par télescopage (C 505d)

19) (u_n) géométrique de raison $q \notin \{0,1\}$ (C 515a)

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-q}$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

20) $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$ (C 516b)

$$= (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nbre termes})}}{1 - \text{raison}}$$
$$= \frac{(1^{\text{er}} \text{ qui y est}) - (1^{\text{er}} \text{ qui n'y est plus })}{1 - \text{raison}}$$

21) $S_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} j = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) = \sum_{j=0}^{n} j^2 + \sum_{j=0}^{n} j$ (C 537a)

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{6}((2n+1)+3) = \frac{n(n+1)}{6}(2n+4) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

22) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 539c)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Par exemple pour $n = 2$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{2} b_k\right) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$$

et $\sum_{k=1}^{2} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2$

La vraie formule est : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i b_k$

23) $\exists k \in [[1,n]],\ x_k \leq a$ (C 588h)

$\iff \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq a$

24) Donner un encadrement décimal de $x \in \mathbb{R}$ à 10^{-n} près : (C 605b)

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Par exemple pour $x = \pi$ et $n = 2$ $\quad 10^2\pi = 314{,}15\ldots$

$\Rightarrow \lfloor 10^n x \rfloor = 314 \Rightarrow \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = 3{,}14 \Rightarrow 3{,}14 \leq \pi < 3{,}15$

25) $\binom{n+1}{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1} \cdot \binom{n}{p}$ pour $0 \leq p \leq n$ (C 629b)

26) Construire les 6 premières lignes du triangle de Pascal (C 635)

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

27) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k . 1^{n-k} = -1 + (1+x)^n$ (C 640f)

28) Si $P \Rightarrow Q$ est FAUSSE (C 704b)

alors sa réciproque est : **On ne sait pas**

29) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 716f)

$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y \geq x$

On prend $x = 0$

30) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 725c)

La proposition suivante dépend de y

$\forall x \in E, \exists \alpha \in F, \forall y \in E, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < A$

En effet, y est précédé d'un quantificateur. Donc la proposition ne dépend pas de y

31) A et B sont deux ensembles. Démontrer que $A \cap B \subset A$ (C 747a)

Soit $x \in A \cap B$

$\Rightarrow$ $x \in A$ ET $x \in B$

$\Rightarrow$ $x \in A$ CQFD

32) Soit $f : I \to J$ une fonction. Traduire avec quantificateurs : (C 1021b)

f n'est pas de signe constant sur I.

$\iff$ $\exists (x,y) \in I^2,\ f(x) < 0 < f(y)$

(ou encore $\iff$ $\exists (x,y) \in I^2,\ f(x).f(y) < 0$)