1 Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x+1|-|2-x|\leq 3$

$2x+1\geq 0 \iff x\geq -1/2$ $\quad 2-x\geq 0 \iff x\leq 2$

$$|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\geq -1/2 \\ -2x-1 & \text{si } x<-1/2 \end{cases}$$

$$|2-x|=\begin{cases} -2+x & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x<2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad -|2-x|=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x\geq 2 \\ x-2 & \text{si } x<2 \end{cases}$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-1/2$	2	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$	
$-\lvert 2-x\rvert$	$x-2$	$x-2$	$-x+2$	
$\lvert 2x+1\rvert-\lvert 2-x\rvert$	$-x-3$	$3x-1$	$x+3$	

- 1er cas : sur $]-\infty\ ;\ -1/2[$

  $(E) \iff -x-3\leq 3$

  $\iff -x\leq 6$

  $\iff x\geq -6$

  Or $x<-1/2$

  $\Rightarrow S_1=[-6\ ;\ -1/2[$
- 2ème cas : sur $[-1/2\ ;\ 2[$

  $(E) \iff 3x-1\leq 3$

  $\iff 3x\leq 4$

  $\iff x\leq 4/3$

  Or $x\in[-1/2\ ;\ 2]$

  $\Rightarrow S_2=[-1/2\ ;\ 4/3]$
- 3ème cas : sur $[2\ ;\ +\infty[$

  $(E) \iff x+3\leq 3$

  $\iff x\leq 0$

  Or $x\in[2\ ;\ +\infty[$

  $\Rightarrow S_3=\emptyset$
- Conclusion : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=[-6\ ;\ 4/3]$

2) Mettre sous forme trigonométrique $z=\dfrac{\cos a-\mathbf{i}\sin a}{\sin a-\mathbf{i}\cos a}$

- Numérateur :

  $$\cos a-\mathbf{i}\sin a=\cos(-a)+\mathbf{i}\sin(-a)=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}$$

  Ou encore

  $$\cos a-\mathbf{i}\sin a=\overline{\cos(a)+\mathbf{i}\sin(a)=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}}=\overline{\mathrm{e}^{(\mathbf{i}.a)}}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}$$
- Dénominateur :

  $$\sin a-\mathbf{i}\cos a=-\mathbf{i}^2\sin a-\mathbf{i}\cos a=-\mathbf{i}(\mathbf{i}\sin a+\cos a)=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.a}$$

  ou encore

  $$\mathbf{i}(\sin a-\mathbf{i}\cos a)=\mathbf{i}.\sin a+\cos a=\mathrm{e}^{\mathbf{i}.a}$$

  $$\Rightarrow \quad \sin a-\mathbf{i}\cos a=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.a}}{\mathbf{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.a}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/2}}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(a-\pi/2)}$$
- Donc

  $$z=\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}}{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.a}}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}\mathrm{e}^{+\mathbf{i}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.a}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\pi/2-2a)}$$

  $$=\cos(\tfrac{\pi}{2}-2a)+\mathbf{i}\sin(\tfrac{\pi}{2}-2a)$$

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(x^2+3x+1)(-2x^2+x+1)\geq 0$

Il faudra faire un tableau de signes

- $P(x)=x^2+3x+1$ $\quad \Delta=3^2-4=5$

  $$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$
- $Q(x)=-2x^2+x+1$

  Racine évidente : $x_3=1$ $\quad x_3x_4=\dfrac{-1}{2} \quad\Rightarrow\quad x_4=\dfrac{-1}{2}$
- Il faut mettre dans l'ordre les racines :

  $2<\sqrt{5}<3 \quad\Rightarrow\quad -1<-3+\sqrt{5}<0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{-1}{2}<x_1<0$

  $-3<-\sqrt{5}<-2 \quad\Rightarrow\quad -6<-3-\sqrt{5}<-5 \quad\Rightarrow\quad -3<x_2<\dfrac{-5}{2}$

  Donc $x_2<-1/2<x_1<1$
- D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_2		$-1/2$		x_1		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$Q(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$P(x)Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = [x_2\ ;\ -1/2] \cup [x_1\ ;\ 1] = \left[\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{-1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\ ;\ 1\right]$

4) a) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k} 3^{n-3k}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k} 3^{n-3k}$$

on ajoute le terme pour $k=0$ dans le sigma :

$$= -3^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^2)^k . 3^n . (3^{-3})^k$$

$$= -3^n + 3^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^k$$

$$= -3^n + 3^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{4}{27}\right) . 1^{n-k}$$

$$= -3^n + 3^n \left(1 + \frac{4}{27}\right)^n$$

$$= -3^n + 3^n \left(\frac{31}{27}\right)^n$$

$$= -3^n + \left(\frac{31}{3}\right)^n$$

Ou bien encore :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k} 3^{n-3k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2^2)^k . 3^n . (3^{-3})^k$$

$$= 3^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\frac{2^2}{3^3})^k$$

on ajoute le terme pour $k=0$ dans le sigma :

$$= 3^n \left(-1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{2^2}{3^3})^k . 1^{n-k} \right)$$

$$= 3^n \left(-1 + (\tfrac{2^2}{3^3} + 1)^n \right)$$

$$= 3^n \left(-1 + (\tfrac{31}{27})^n \right)$$

$$= -3^n + (\tfrac{31}{9})^n$$

b) Vérifier la formule obtenue pour $n=2$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} 2^{2k} 3^{2-3k} = \binom{2}{k} 2^{2k} 3^{2-3k} + \binom{2}{k} 2^{2k} 3^{2-3k}$$

$$= \binom{2}{1} 2^2 3^{-1} + \binom{2}{2} 2^4 3^{-4} = 2 \times \frac{4}{3} + 1 \times \frac{2^4}{3^4} = \frac{2^3 \times 3^3}{3^4} + \frac{2^4}{3^4}$$

$$= 2^3 \left(\frac{27}{3^4} + \frac{2}{3^4} \right) = \frac{8 \times 29}{3^4} = \frac{8 \times (30-1)}{3^4} = \frac{240-8)}{3^4} = \frac{262}{81}$$

D'autre part :

$$-3^n + (\tfrac{31}{9})^n = -3^2 + \tfrac{31}{9})^2 = -9 + \tfrac{31^2}{9^2} = -9 + \tfrac{(30+1)^2}{81}$$

$$= \frac{-9 \times 81 + 900 + 60 + 1}{81} = \frac{-729 + 900 + 60 + 1}{81} = \frac{171 + 60 + 1}{81} = \frac{232}{81}$$

Ca marche

5) Calculer, pour $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$
(On donnera une expression finale ne dépendant que de fonctions réelles)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.kx}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}.kx} \right)$$

Or $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}.kx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}$

- 1^{er} cas : $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x} = 1 \iff x = 0[2\pi]$
  Dans ce cas, $kx = 0\ [2\pi] \Rightarrow \sin(kx) = 0$
  Donc $T_n(x) = 0$
- $2^{\text{ème}}$ cas : $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x} \neq 1 \iff x \neq 0[2\pi]$
  Donc

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k \\ &= \frac{1-(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.(n+1)x/2}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.x/2}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2}\cdot\frac{-2\mathbf{i}.\sin((n+1)\frac{x}{2})}{-2\mathbf{i}.\sin\frac{x}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2}\cdot\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}T_n &= \mathrm{Im}(\sigma_n) = \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2}) \\ &= \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\sin(n\tfrac{x}{2})\end{aligned}$$

6) Mettre sous forme exponentielle $B=(-\sqrt{3}-\mathbf{i})^7$
En déduire l'écriture algébrique de B

Posons $z=-\sqrt{3}-\mathbf{i} \quad\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{3+1}=2$

$$z=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\frac{-1}{2}\right)=2\big(\cos(-5\pi/6)+\mathbf{i}.\sin(-5\pi/6)\big)=2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}5\pi/6}$$

D'où

$$B=z^7=\big(2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.5\pi/6}\big)^7=2^7\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.35\pi/6}$$

Avec $\dfrac{-35\pi}{6}=\dfrac{-35\pi}{6}+6\pi=\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad B &= \boxed{2^7\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/6}} \\ &= 2^7\left(\cos(\pi/6)+\mathbf{i}\sin(\pi/6)\right) \\ &= 2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{2^6\sqrt{3}+\mathbf{i}.2^6}\end{aligned}$$

7) Linéariser l'expression suivante en utilisant les exponentielles complexes :
$C=\sin^3(x)\ \cos(x)$ (Méthode standard)

$$\begin{aligned}C &= \sin^3(x)\ \cos(x) \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)^3\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^3-3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^2(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})+3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^2-(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^3}{2^3.\mathbf{i}^3}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.3x}-3\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}+3\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.3x}}{-8\mathbf{i}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{-16\mathbf{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.4x} & -3\mathrm{e}^{\mathbf{i}.2x} & +3 & -\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2x} & \\ & +\mathrm{e}^{\mathbf{i}.2x} & -3 & +3\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.3x} & -\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.7x}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-16\mathbf{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.4x} & -2\mathrm{e}^{\mathbf{i}.2x} & +0 & +2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2x} & -\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.4x}\end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{16\mathbf{i}}\big((\mathrm{e}^{\mathbf{i}.4x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.4x})-2(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.2x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.2x})\big) \\ &= \frac{-1}{16\mathbf{i}}\big(2.\mathbf{i}.\sin(4x)-2.2\mathbf{i}.\sin(2x)\big) \\ &= \frac{1}{8}\left(-\sin(4x)+2\sin(2x)\right) \\ &= \frac{-1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\end{aligned}$$

8) Soit l'équation $2\cos x+\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** Déterminer les couples $(\cos x,\ \sin x)$ solutions de **(E)**

$$\begin{aligned}(E) &\iff 2\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \begin{cases}2\cos x+\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos^2 x+\sin^2 x=1\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}2X+Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ X^2+Y^2=1\end{cases} \quad\text{en posant}\quad \begin{cases}X=\cos x\\ Y=\sin x\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad Y=\frac{\sqrt{2}}{2}-2X=\frac{\sqrt{2}-4X}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& X^2+Y^2=1 \\
\iff \quad & X^2+\left(\frac{\sqrt{2}-4X}{2}\right)^2=1 \\
\iff \quad & 4X^2+(\sqrt{2}-4X)^2=4 \\
\iff \quad & 4X^2+2-8\sqrt{2}\,X+16X^2=4 \\
\iff \quad & 20X^2-8\sqrt{2}.X-2=0 \\
\iff \quad & 10X^2-4\sqrt{2}.X-1=0
\end{aligned}$$

$\Delta=(-4\sqrt{2})^2-4.10.(-1)=4^2.2+4.10=4(8+10)=4.9.2=6^2.2$

$X_1=\dfrac{4\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{20}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $X_2=\dfrac{4\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{20}=\dfrac{-\sqrt{2}}{10}$

Vérif : $X_1X_2=\dfrac{-2}{20}=\dfrac{-1}{10}=$« $\dfrac{c}{a}$ »

$X_1+X_2=\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{2}}{10}=\dfrac{4\sqrt{2}}{10}=\dfrac{-b}{a}$

Or $\quad Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2X$

$\Rightarrow \quad Y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2X_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$Y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2X_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\dfrac{-\sqrt{2}}{10}=\dfrac{5\sqrt{2}}{10}+\dfrac{5\sqrt{2}}{10}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

Conclusion les deux couples solutions $(\cos x,\ \sin x)$ sont :

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\ ;\ \left(\frac{-\sqrt{2}}{10}\ ,\ \frac{7\sqrt{2}}{10}\right)}$$

Vérif : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$: pas de problème car c'est $\quad(\cos(-\pi/4)\ ;\ \sin(-\pi/4))$

$X_2^2+Y_2^2=\dfrac{2}{100}+\dfrac{49\times 2}{100}=\dfrac{2+98}{100}=1$ $\quad$ ça marche

9) Exprimer $\quad A=\sin(4\theta)\quad$ en fonction de $\quad\sin\theta$ et $\cos\theta$
en utilisant les exponentielles complexes

$A=\sin(4\theta)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}4\theta})$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathbf{i}4\theta} &= (\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^4 \\
&= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\cos\theta)^{4-k}(\mathbf{i}\sin\theta)^k \\
&= 1.(\cos\theta)^4(\mathbf{i}\sin\theta)^0+4(\cos\theta)^3(\mathbf{i}\sin\theta)^1+6(\cos\theta)^2(\mathbf{i}\sin\theta)^2 \\
&\qquad +4(\cos\theta)^1(\mathbf{i}\sin\theta)^3+1(\cos\theta)^0(\mathbf{i}\sin\theta)^4 \\
&= (\cos\theta)^4+\mathbf{i}.4(\cos\theta)^3\sin\theta-6(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 \\
&\qquad -\mathbf{i}.4(\cos\theta)(\sin\theta)^3+(\sin\theta)^4
\end{aligned}$$

Donc

$A=\sin(4\theta)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}4\theta})=4(\cos\theta)^3\sin\theta-4(\cos\theta)(\sin\theta)^3$

2 Problème : *Formule d'inversion de Pascal*

L'objectif de l'exercice est de démontrer la *formule d'inversion de Pascal* :

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels tels que

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_k \quad \textbf{E1}$$

alors on a $$\forall p \in \{1, \ldots, n\}, \quad b_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k \quad \textbf{E2}$$

1. *Exploration*

a. Écrire les relations de **(E1)** pour $p = 1$, $p = 2$,$p = 3$

Pour $p = 1$: $a_1 = \sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} b_k = \binom{1}{1} b_1 = b_1$

Pour $p = 2$: $a_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} b_k = \binom{2}{1} b_1 + \binom{2}{2} b_2 = 2b_1 + b_2$

Pour $p = 3$: $a_3 = \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} b_k = \binom{3}{1} b_1 + \binom{3}{2} b_2 + \binom{3}{3} b_3 = 3b_1 + 3b_2 + b_3$

b. En déduire les expresions de b_1,b_2,b_3 en fonctions de a_1,a_2,a_3

$a_1 = b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = a_1$

$a_2 = 2b_1 + b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = a_2 - 2b_1 = a_2 - 2a_1$

$a_3 = 3b_1 + 3b_2 + b_3$

$\Rightarrow \quad b_3 = a_3 - 3b_1 - 3b_2 = a_3 - 3a_1 - 3(a_2 - 2a_1) = a_3 - 3a_2 + 3a_1$

c. Vérifier alors les relations de **(E2)** pour $p = 1$, $p = 2$,$p = 3$

Pour $p = 1$: $b_1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} a_k = (-1)^{1-1} \binom{1}{1} a_1 = a_1$

Pour $p = 2$: $b_2 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} a_k = (-1)^{2-1} \binom{2}{1} a_1 + (-1)^{2-2} \binom{2}{2} a_2$

$- 2a_1 + a_2$

Pour $p = 3$:

$$\begin{aligned} b_3 &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{3-k} \binom{3}{k} a_k \\ &= (-1)^{3-1} \binom{3}{1} a_1 + (-1)^{3-2} \binom{3}{2} a_2 + (-1)^{3-3} \binom{3}{3} a_3 \\ &= 3a_1 - 3a_2 + a_3 \end{aligned}$$

On retrouve bien les formules précédentes

2. *Préliminaires*

a. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

b. En déduire qu'on a, pour tout entier $\ell \geq 1$, $\quad \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$

$$\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} (-1)^i 1^{\ell-i} = (-1+1)^\ell = 0$$

3. *Un lemme*

Pour deux entiers $q \leq p$, on pose $\quad S_{q,p} = \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q}$

a. Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $q \leq k \leq p$, on a

$$\binom{p}{k} \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \binom{p-q}{k-q}.$$

$$\begin{aligned} \binom{p}{q} \binom{p-q}{k-q} &= \frac{p!}{q!\,(p-q)!} \cdot \frac{(p-q)!}{(k-q)!\,\big((p-q)-(k-q)\big)!} \\ &= \frac{p!}{q!} \cdot \frac{1}{(k-q)!\,(p-k)!} \\ &= \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \cdot \frac{k!}{q!\,(k-q)!} \\ &= \binom{p}{k} \binom{k}{q} \end{aligned}$$

b. En déduire que, pour tout entier p et tout entier $q < p$, on a

$S_{q,p} = 0$

$$S_{q,p} = \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q}$$
$$= \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$$
$$= \binom{p}{q} \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p-q}{k-q}$$

On pose $i = k - q$ $\quad \begin{cases} k = p & i = p-q \\ k = q & i = 0 \end{cases}$

$$S_{q,p} = \sum_{i=0}^{p-q} (-1)^{i+q} \binom{p}{q}\binom{p-q}{i}$$
$$= (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{i=0}^{p-q} (-1)^i \binom{p-q}{i}$$
$$= (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} \quad \text{avec} \quad \ell = p-q \geq 1 \quad \text{car} \quad q < p$$
$$= 0 \qquad \text{D'après la question 1.b.}$$

c. Que vaut $S_{q,p}$ pour $q = p$?

$$S_{q,p} = \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q}$$

Donc, pour $q = p$,

$$S_{q,p} = S_{p,p} = \sum_{k=p}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{p} = (-1)^p \binom{p}{p}\binom{p}{p} = (-1)^p$$

4. *Démonstration de la formule d'inversion*

a. Justifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i.$$

Par hypothèse, on a : $\forall p \in \{1, \ldots, n\}$, $a_p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_k$

Ou encore ,avec $\begin{cases} p \to k \\ k \to i \end{cases}$: pour $1 \leq k \leq n$ $\quad a_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b_i$

Donc en remplaçant :

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} b_i$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq k \leq p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i.$$

b. Ici $f(i,k)$ est une expression pouvant comporter les variables i et k.
Renseignez les « ? » (aucune justification n'est demandée) :

$$\sum_{1 \leq i \leq k \leq p} f(i,k) = \sum_{i=?}^{?} \sum_{k=?}^{?} f(i,k)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq k \leq p} f(i,k) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=i}^{p} f(i,k)$$

c. Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Il faut donc démontrer que

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\},\ b_p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k$$

Partons du deuxième membre de l'égalité (que l'on note σ) :

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq k \leq p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=i}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^p\ b_i \sum_{k=i}^{p} (-1)^{-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}(-1)^p\ b_i \sum_{k=i}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{i} \quad \text{car} \quad (-1)^{-k} = (-1)^k$$

On reconnaît $S_{i,p} = \sum_{k=i}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{i}$

D'où $\sigma = \sum_{i=1}^{p}(-1)^p\ b_i S_{i,p}$

Or d'après la formule 3b) : pour $i < p$, $S_{i,p} = 0$

Donc

$\sigma = (-1)^p\ b_p S_{p,p}$
$= (-1)^p.b_p.(-1)^p$ car (formule 3.c) $S_{p,p} = (-1)^p$
$= b_p$ CQFD

Musée des horreurs

Exo 7

Chères parenthèses

$$\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^3$$

Cette écriture n'a aucun sens car on ne sait pas à quoi s'appliquent les parenthèses.
Est-ce $\mathrm{Im}\left((\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^3\right)$ ou bien $\left(\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})\right)^3$?
A force d'écrire des choses ambiguës, vous faites n'importe quoi dans les calculs, et plus grave vous vous condamner à ne rien comprendre. Parce que vous ne faites pas de différence entre des choses différentes.

Ce genre de confusion peut mener aux formules suivantes.

Formules étranges

$$\sin^3(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.3x})$$

$$\sin^3(x) = \sin(3x)$$

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.x}}{2\mathbf{i}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.3x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}.3x}}{(2\mathbf{i})^3}$$

D'après la célèbre formule

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

Un réel assez complexe

$$C = \sin^3(x)\cos x = \cdots = \frac{1}{8\mathbf{i}}(\sin 4x - 2cos2x)$$

Ce résultat est totalement absurde car C est un nombre réel, donc le résultat doit être réel !

Oh le beau résultat !

$$Y = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{18}}{10}$$

Peut-être pourrait-on éventuellement simplifier un tout petit peu ce résultat ?

Jouons aux factorielles

$$\frac{(p-q)!}{(k-q)!} = (p-k)!$$

C'est une conséquence de la non moins célèbre formule :

$$\frac{a!}{b!} = (a-b)!$$

Qui est fausse quand $0 \leq b \leq a$ et qui est « encore plus fausse » quand $a < b$

Car il ne faut surtout pas confondre les formules fausses, avec les formules vraiment fausses ou les formules complètement fausses, ou bien encore les formules très très fausses...

Forme exponentielle

$$z = -\mathrm{e}^{\mathbf{i}(2a+3\pi/2)}$$

Ce n'est pas écrit sous forme exponentielle car le coefficient devant l'exponentielle doit être un réel **positif** : $z = r.\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ avec $r > 0$.

Le calcul mystère

$$3^{n-3k} = \frac{1}{27}3^{n-k}$$

C'est du grand n'importe n'importe quoi. On ne voit même pas quelle formule fausse pourrait avoir été utilisée...
Peut-être un truc du genre $3^{3k} = 3^3.3^k$. Mais ce n'est même pas sûr.

Partie imaginaire

$$T_n = \text{Im}\left(\text{e}^{\text{i}.nx/2} \cdot \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \text{Im}(\text{e}^{\text{i}.nx/2})$$

car $\dfrac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$ est réel

Il faut apprendre à distinguer l'addition et la multiplication.

Certaines propriétés marchent pour l'addition, d'autre pour la multiplication. Et ce ne sont pas forcément les mêmes!

Par exemple pour $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$,
$\text{Im}(z+a) = \text{Im}(z)$ mais $\text{Im}(a.z) = a\text{Im}(z)$

Rédaction :

La question :

En déduire qu'on a, pour tout entier $\ell \geq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i\binom{\ell}{i} = 0$

Et voici la réponse

$$\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}(-1)^i 1^{\ell-i} = \dots$$

La moindre des choses et de faire le lien avec la question posée!

Il faut donc commencer le calcul avec ce qui est donné dans l'énoncé, cad ici :

$$\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i\binom{\ell}{i} = \dots$$

Enchaînements

$$\begin{aligned} &-2x-1-(2-x) \leq 3 \\ &-2x-1-2+x \leq 3 \\ &-x \leq 6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Y a-t-il un lien, éventuellement logique (on ne sait jamais cela peut parfois arriver), entre ces différentes lignes ?

Vérifaction Exo 1 4)b)

Vérification :

$$\begin{aligned} &3^2\left(1+\frac{4}{27}\right)^2 - 1 \\ &= 3^2\left(1+2\frac{4}{27}+\left(\frac{4}{27}\right)^2\right) - 1 \\ &= 3^2\left(1+\frac{8}{27}+\frac{4^2}{27^2}\right) - 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Cette méthode ne vérifie rien. En effet, elle consiste à reprendre exactement les mêmes calculs que dans la question a) en remplaçant n par 2.

Cela ne permet donc pas de détecter une erreur de raisonnement. En effet, si on l'a fait à la question a) on la fera pareillement à la question b).
Donc pour vérifier, il faut essayer de calculer par **une autre méthode**.