1 L'implication

Exemple : prenons la propositions suivante

$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9)$ qui intuitivement est : Vraie

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 3$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9)$
5	V	V	V
2	F	F	V
-4	F	V	V

Considérons maintenant la proposition suivante

$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25)$ qui intuitivement est : Fausse

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 25$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25)$
6	V	V	V
2	F	F	V
4	V	F	F
-6	F	V	V

On obtient donc la table de vérité suivante

P	**Q**	**P⇒Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque que si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de Q.
La seule chose à laquelle sert l'implication est la suivante :

Si $P \Rightarrow Q$ est **vraie** et si P est **vraie**,

alors Q est également **vraie**.

On dit que

Définition 1 : Condition nécessaire / suffisante

Si on a $P \Rightarrow Q$

P est une condition **suffisante** de Q

Q est une condition **nécessaire** de P

Par exemple : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$
Cette implication est toujours vraie (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).
Si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$
Par contre, si $x \neq 0$, alors on ne peut rien dire sur le produit xy : on peut aussi bien avoir $xy = 0$ que $xy \neq 0$.

$(x = 0)$ est une condition suffisante de $(xy = 0)$

$(xy = 0)$ est une condition nécessaire de $(x = 0)$

Une implication est vraie si et seulement si P est fausse OU Q est vraie :

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \quad \equiv \quad (\neg P \vee Q)}$$

1.1 Négation d'une implication

En appliquant les formule de Morgan, on obtient :

$$\boxed{\neg(p \Rightarrow q) \quad \equiv \quad (p \wedge \neg q)}$$

Une implication est fausse si le premier terme est vrai et que le deuxième ne l'est pas.

1.2 Contraposée

Reprenons l'exemple précédent : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Si on a : $xy \neq 0$, alors on peut affirmer que $x \neq 0$
On a donc : $(xy \neq 0) \Rightarrow (x \neq 0)$
C'est ce qu'on appelle la **contraposée** : $\boxed{[p \Rightarrow q] \equiv [\neg q \Rightarrow \neg p]}$

Exemples d'utilisation : par contraposée

$[x \in A \cap B \Rightarrow x \in A]$ devient : $[x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B]$

$[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$ devient $[x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A]$

1.3 Démonstration d'une implication : [$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$]

- Simple
  Supposons $\mathcal{P}$
  ...
  on a $\mathcal{Q}$
- Par contraposée
  Montrons non-$\mathcal{Q} \Rightarrow$ non-$\mathcal{P}$
  Supposons non-$\mathcal{Q}$,(montrons non-$\mathcal{Q}$)
  ...
  On a donc non-$\mathcal{P}$
  Donc, par contraposée : [$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$]
- Par l'absurde

  On suppose à la fois $\mathcal{P}$ et non-$\mathcal{Q}$ et on montre que c'est impossible :

  Supposons $\mathcal{P}$ et non-$\mathcal{Q}$
  ...
  Impossible
  Donc $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$

1.4 Démonstration d'implications complexes

1. $(P$ ou $Q) \Rightarrow R$

Supposons P ou Q	
1er cas : on a P ... on a R	2ème cas : on a Q ... on a R
Dans tous les cas, on a R Donc $(P$ ou $Q) \Rightarrow R$	

2. $P \Rightarrow (Q$ ou $R)$

Suppsons P On a Q ou non-Q	
1er cas : on a Q on a alors Q ou R	2ème cas : on a non-Q (cad Q est faux) ... on a R donc on a Q ou R
Dans tous les cas : Q ou R Donc $P \Rightarrow (Q$ ou $R)$	

1.5 Équivalence :[$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$]

On a : $\boxed{p \iff q \quad \equiv \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$

Ce qui donne le tableau de vérité suivant :

p	**q**	**p ⇒ q**	**q ⇒ p**	**p ⟺ q**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Pour démontrer une équivalence :[$p \iff q$], il faut en général démontrer la double implication : [$p \Rightarrow q$] et [$q \Rightarrow p$]

Avoir :
$[p \iff q]$
revient à dire que :
« p est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de q »

1.6 Existence et unicité

« Il existe un **unique** x vérifiant $\mathcal{P}(x)$. »

On décompose la démonstration en deux partie :

- l'existence (il en existe au moins un)
- et l'« unicité » (il en existe au plus un)

Comment traduire l'unicité ?
Elle signifie qu'on ne peut avoir deux éléments **distincts** x et y d'un ensemble A vérifiant $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$
On a donc :

$$\neg(\exists x \in A,\ \exists y \in A,\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \neg(\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ou encore

$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \neg[\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)\ ] \text{ ou } (x = y)$$

On reconnaît là une implication (car : $(\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$
Ce qui donne :

« Unicité »

« Au plus un un élément de A vérifie $\mathcal{P}$ »

$\iff$ $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ [\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)\ ] \Rightarrow (x = y)$

Démonstration de l'« unicité » : « x tel que $\mathcal{P}(x)$ est unique (s'il existe) »
Soient x et y vérifiant $\mathcal{P}$
On a $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$
...
Alors a $x = y$
Donc, s'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$, alors x est unique
(ou encore : il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$)

ATTENTION

Pour montrer « Il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$ », il faut montrer deux choses :
1°) L'existence : il existe au moins un x tel que $\mathcal{P}(x)$.
2°) L'« unicité » : Il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$.

Autre méthode : par analyse-synthèse

1°) Analyse :
Supposons qu'il existe x tel que $P(x)$
...
Alors $x = x_0$
Donc x_0 est la seule solution possible.
(Attention : cela ne prouve pas que x_0 est réellement solution. En effet, on a supposé au départ que x marchait.)

2°) Synthèse :
Montrons que x_0 vérifie la propriété P
...
On a bien $P(x_0)$

Exemple :
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application
Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $h = f + g$, f est paire et g est impaire.

2 Les ensembles

2.1 définitions d'ensembles

Définition d'un ensemble

- par extension :
  $A = \{1,2,3\}$

- ou par compréhension :
  $A = \{t \in \mathbb{R},\ t^2 < 1\}$
  $B = \{t \in \mathbb{R},\ \exists x \in [-2,\ 1],\ t = 2x + 3\}$
  $C = \{2x + 3,\ x \in [-2,\ 1]\}$
  $D = \{x,\ 2x + 3 \in [-2,\ 1]\}$

  Donner sous forme d'intervalles les ensembles précédents

2.2 Opérations

Définition 2 : Opérations

- Intersection : $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$
- union : $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- différence : $A \backslash B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

  $A \backslash B$ est appelé le complémentaire de B dans A
- Si on se place dans un « grand ensemble » Ω, on peut définir le complémentaire de A :

  $$\overline{A} = \{x \in \Omega \ / \ x \notin A\} = \Omega \backslash A$$

Définition 3 : Ensemble vide

$$A = \emptyset \iff \forall x,\ x \notin A$$
$$\iff \forall x,\ (\ x \in A \text{ est impossible }\ )$$

Définition 4 : Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$

Définition 5 : inclusion, égalité

- $$A \subset B \iff \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$
  $$\iff \forall x \in A,\ x \in B$$

  Quand $A \subset B$, on dit que A est un sous-ensemble de B ou bien que A est une partie de B
- $$A = B \iff A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A$$

2.3 Démonstrations

- $\underline{x \notin A}$

  Pour démontrer $x \notin A$, il peut être intéressant de supposer que $x \in A$, et ensuite de montrer que cela est impossible

> Montrons que $x \notin$A
> Par l'absurde : supposons $x \in A$
> ...
> Impossible
> Donc $x \notin A$

- $\underline{A \subset B}$

> Montrons $A \subset B$
> Soit $x \in A$ (montrons que $x \in B$)
> ...
> D'où $x \in B$
> Donc $A \subset B$

- $\underline{A = B}$

  On montre la double inclusion :

> Montrons que $A \subset B$
> ...
> Montrons que $B \subset A$
> ...
> $A \subset B$ et $B \subset A$. Donc $A = B$.

- $\underline{A = \emptyset}$

> Soit $x \in A$
> ...
> Impossible
> Donc $A = \emptyset$

2.4 Généralisations

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E.

- L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à chacun des deux ensembles
  Alors l'intersection des A_i est l'ensemble des éléments appartenant à chacun des A_i :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i$$

- L'union de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins de ces deux ensembles.
  Alors l'union des (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à au moins un des A_i :

$$\boxed{x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i}$$

2.5 Produit (cartésien) d'ensembles

Définition 6 : Produit de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et B et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (a,b) tels que $a \in A$ et $b \in B$

$$A \times B = \{(a,b)/a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \iff (x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

Définition 7 : Produit de n ensembles

On définit de la même façon le produit de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,\ \ldots,\ a_n)/a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n\}$$

$(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ est appelé un n-uplet

Définition 8 : Égalité de deux n-uplets

Soient $(a_1,\ \ldots,\ a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ et $(b_1,\ \ldots,\ b_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n) = (b_1,\ \ldots,\ b_n)$$
$$\iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n$$
$$\iff \forall i \in [[1,\ n]],\ a_i = b_i.$$

Définition 9 : cas du même ensemble

On note E^n l'ensemble $E \times E \times \cdots \times E$ (n fois)

$$(a_1, \ldots a_n) \in E^n \iff \forall i \in [[1,\ n]],\ a_i \in E$$

Exemple 1 : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3 \iff a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

Exemple 2 :

$u \in \mathbb{R}^2 \iff$ il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $u = (a,b)$

2.6 Ensemble des parties de E

Définition 10

Soit E un ensemble

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles (ou parties) de E

Exemple : $E = \{a,\ b\}$

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\Big\}$$

$\mathscr{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensembles. Il contient en particulier E et $\emptyset$

Curiosité : si $E = \emptyset$ alors $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
Donc l'ensemble des partie de l'ensemble vide n'est pas vide. Il contient un unique élément qui est l'ensemble vide.
Il ne faut donc pas confondre $\emptyset$ avec $\{\emptyset\}$

3 Applications (ou fonctions)

3.1 Définitions

Définition 11 : Application

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F fait correspondre à tout élément x de E un unique élément y de F qu'on note $f(x)$.

On écrit alors :

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

- E est appelé l'ensemble de départ de f
- F est appelé l'ensemble d'arrivée de f.
- y est appelé **L**'image de x par f
- x est appelé **UN** antécédent de y par f.

Tout élément de E admet une *unique image* dans F par f.
Par contre, un élément de F peut admettre aucun, un seul ou plusieurs

antécédent(s) par f.

Attention : Il est essentiel de distinguer f et $f(x)$
- f est une **application**
- $f(x)$ est l'**image** de x par f, c'est-à-dire un **élément** de F

Par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

f est une application $f(x)$ est un réel

3.2 Diagramme sagittal

3.3 Égalité de deux applications

Définition 12 : Égalité de deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si :
- elles ont même ensemble de départ
- elles ont même ensemble d'arrivé
- elles coïncident sur leur ensemble de départ E :
  $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

Exemple :
Soient les applications f, g, h et i suivantes :

$f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $h : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2\end{array}$ $i : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2\end{array}$

Aucune de ces applications n'est égale à une autre.
- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au moins un antécédent ?
  pour f,g faux pour h,i vrai
- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
  f,h faux car, par exemple, 4 a deux antécédents 2 et -2 pour g,i : vrai
- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent un unique antécédent ?
  Ce n'est vrai que pour i
  i est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

$j : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$

Tout y de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}^-$ qui est $-\sqrt{y}$
j est aussi une bijection.

Définition 13 : Bijection

L'application $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée (F) admet un **unique** antécédent par f dans l'ensemble de départ (E).

3.4 opérations

Définition 14 : somme et produit

Soient f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$
On définit les applications suivantes :
- $f + g : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f.g : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
  $a.f + b.g : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (a.f + b.g)(x) = a.f(x) + b.g(x)$
  ($a.f + b.g$ est appelée une « combinaison linéaire » de f et g)

On a plus qu'un jeu d'écriture : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f + g$ est une somme de deux *applications*
- $f(x) + g(x)$ est la somme de deux *réels*.

3.5 Composée de deux applications

Définition 15 Composée d'applications

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
On appelle « composée de f et g » l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

De nouveau, cette dernière écriture n'est pas un simple jeu de déplacement de parenthèses :

- x est un élément de E,
  $g \circ f$ est une application de E dans G
  et $(g \circ f)(x)$ est un élément de G

- x est un élément de E,
  $f(x)$ est un élément de F,
  $g[f(x)]$ est un élément de G.

Exemple 1 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$
Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2 + x] = x^2 + x + 1$$
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x+1] = (x+1)^2 + (x+1) = x^2 + 3x + 2$$

Exemple 2 : Idem avec $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x/2 - 1/2$

En général, on a donc $f \circ g \neq g \circ f$. (On dira que la composée des applications n'est pas *commutative*). Par contre :

Propriété 1 : associativité

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, trois applications.
On a alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(La composée des applications est *associative*.

Démonstration

- $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont deux applications de E dans H (trivial)
- Soit $x \in E$,
  $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]]$
  D'autre part
  $[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))]$
  On a donc bien $\forall x \in E$, $[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$
- Conclusion $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

fin demo

Propriété 2 : Domaine de définition d'une composée

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ existe
si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

Exemple : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{2}{1-x}$

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
- $D_{f\circ g}$?
  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ existe ssi
  § $x \in D_g \iff x \neq 1$
  § $g(x) \in D_f \iff g(x) \neq -1$
  Or $g(x) = -1 \iff \dfrac{2}{1-x} = -1 \iff 2 = -1 + x \iff x = 3$
  Donc $x \neq 3$
  § Conclusion : $D_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{1\ ;\ 3\}$
- $D_{g\circ f}$?
  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ existe ssi
  § $x \in D_f \iff x \neq -1$
  § $f(x) \in D_g \iff f(x) \neq 1$
  Or $f(x) = 1 \iff \dfrac{3x-1}{x+1} = 1 \iff 3x - 1 = x + 1 \iff x = 1$
  Donc $x \neq 1$
  § Conclusion : $D_{g\circ f} = \mathbb{R}\backslash\{1\ ;\ -1\}$

Remarque : pour $x \in D_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{1\ ;\ 3\}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{1-x}\right) = \frac{3\dfrac{2}{1-x} - 1}{\dfrac{2}{1-x} + 1}$$

$$= \frac{3\dfrac{2}{1-x} - 1}{\dfrac{2}{1-x} + 1} \cdot \frac{1-x}{1-x} \quad \text{car} \quad 1-x \neq 1$$

$$= \frac{6-(1-x)}{2+(1-x)}$$

$$= \frac{5+x}{3-x}$$

On remarque que l'expression finale est définie pour $x = 1$

Mais cette valeur n'a pas de sens. $(f\circ g)(1) = f(g(1))$ n'existe toujours pas. (puisque que $g(1)$ n'existe pas)

Morale de l'histoire :

On doit déterminer le domaine de définition **AVANT** de calculer la fonction en x