Exercice 1 — 2026 PCSI FE 05a

Écrire la négation des propositions suivantes

a)	$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
b)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$	$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$
c)	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$ ou $y < x$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$ et $y \geq x$
d)	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $y < x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ ou $y \geq x$
e)	$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ y < x$	$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ y \geq x$
f)	$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y \leq x \Rightarrow 2y \leq x^2$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y \leq x$ et $2y > x^2$
g)	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Rightarrow x = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 0$ et $x \neq 0$

Exercice 2 — 2026 PCSI FE 05a

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
Dans le cas où elles sont fausses, prouvez-le.

a)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$	V
b)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$	F
c)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$	F
d)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 4 \Rightarrow x < 1$	F
e)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 3$	V
f)	$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x > 2 \Rightarrow 1/x < 1/2$	V
g)	$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x < 2 \Rightarrow 1/x > 1/2$	F
h)	$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 1/x < 0 \Rightarrow x > 0$	F

Exercice 3 — op 524 — 2026 PCSI FE 05c

Démontrer les égalités suivantes :

a) $A \cap B \subset A$

b) $A \subset A \cup B$

c) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

On n'utilisera pas les formules de calcul abstrait des proposition du genre : p ou (q et r) $\equiv$ (p ou q) et (p ou r) (sinon cela perd tout son intérêt : on fait de la cuisine, mais on ne raisonne plus).

Exercice 4 — op 526 — 2026 PCSI FE 05d

Montrer les propositions suivantes :

1) $A \cap B = A \iff A \subset B$

2) $A \cup B = B \iff A \subset B$

3) $[A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C] \Rightarrow [B \subset C]$

4) $A \backslash B = A \iff A$ et B sont disjoints $(A \cap B = \emptyset)$ (*)

5) $[A \backslash C = B \backslash C] \iff [B = (A \backslash C) \cup (B \cap C)]$

Exercice 5 ** — 2026 PCSI FE 05d

Soient $A; B$ deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \subset E$.

(On donnera d'abord une CNS pour qu'il existe des solutions.
Ensuite quand cette condition est remplie, on donnera les solutions sous la forme la plus simple possible)

Exercice 6 — 2026 PCSI FE 07a

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sur quel domaine elle est définie, sur quel domaine la dérivée est calculable et calculer alors sa dérivée :

$a(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 4}$	$b(x) = (e^x + x^2)\ln(x)$	$c(x) = \dfrac{5x^4}{3 + \sqrt{x}}$
$d(x) = \cos(3x - 5)$	$e(x) = \ln(-x) + \ln 2$	$f(x) = e^{3x^2 + \sin x}$
$g(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$	$h(x) = e^{2x-7}$	$i(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$
$j(x) = (\tan x)^4$	$k(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$	$\ell(x) = \tan(5x + 2)$
$m(x) = x \ln x - x$	$n(x) = \ln\left((1 + x^2)e^x\right)$	$o(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 3} - x\right)$
$p(x) = 4^x$	$q(x) = (2x + 1)^{x+3}$	$r(x) = (\ln x)^{\ln x}$

Exercice 7 — 2026 PCSI FE 07a

Étudier (définition, dérivabilité, variations, limites, TV, tracer) les fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad h(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$i(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$ $\quad j(x) = \dfrac{1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $\quad k(x) = x^{-x}$