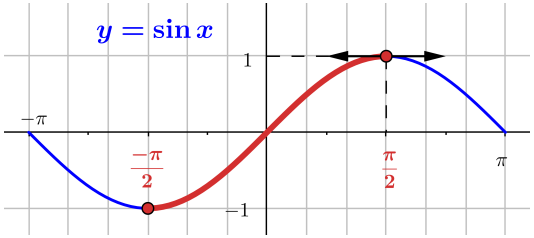
1 Fonctions trigonométriques réciproques

1.1 Arcsin



Propriété 1 : Fonction *sinus*

La fonction *sinus* est continue et strictement croissante sur $I = [-\pi/2; \pi/2]$

Elle établit donc une bijection $\tilde{sin}$

de $I = [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$ dans $f(I) = [-1\ ;\ 1]$

Définition 1 : *arcsin*

La fonction $arcsin : [-1\ ;\ 1] \to [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$ est la réciproque de la fonction $\tilde{sin}$

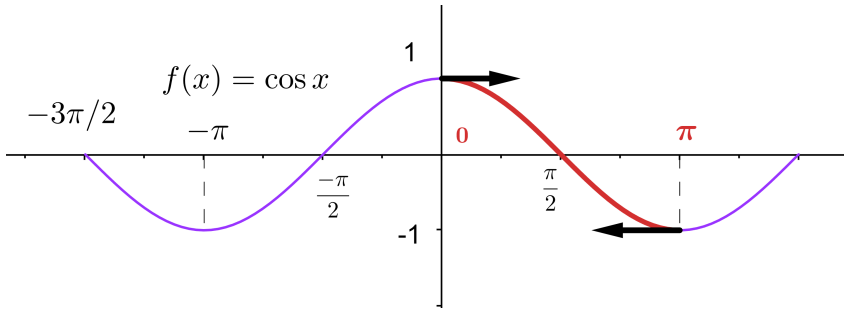
à retenir

- Le domaine de **définition** de *arcsin* est $[-1\ ;\ 1]$
- Le **domaine des valeurs** de *arcsin* est $[-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

Propriété 2 : *arcsin*

- $y = \sin x \iff x = \arcsin y$
  pour $x \in [-\pi/2\ ;\ +\pi/2]$ $y \in [-1\ ;\ 1]$
- $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$
- $\sin(\arcsin x) = x$ pour $x \in [-1\ ;\ 1]$

1.2 Arccos



Propriété 3 : Fonction *cosinus*

La fonction *cosinus* est continue et strictement décroissante sur $I = [0\ ;\ \pi]$

Elle établit donc une bijection $\tilde{cos}$

de $I = [0\ ;\ \pi]$ dans $f(I) = [-1\ \ 1]$

Définition 2 : *arccos*

La fonction $arccos : [-1\ ;\ 1] \to [0\ ;\ \pi]$

est la réciproque de la fonction $\tilde{cos}$

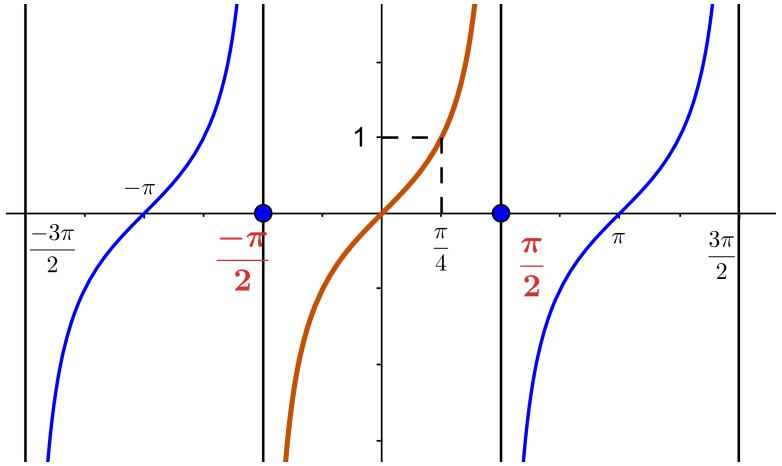
à retenir

- Le domaine de **définition** de *arccos* est $[-1\ ;\ 1]$
- Le **domaine des valeurs** de *arccos* est $[0\ ;\ \pi]$

Propriété 4 : *arccos*

- $y = \cos x \iff x = \arccos y$
  pour $x \in [0\ ;\ \pi]$ $y \in [-1\ ;\ 1]$
- $\arccos(\cos x) = x$ pour $x \in [0\ ;\pi]$
- $\cos(\arccos x) = x$ pour $x \in [-1\ ;\ 1]$

1.3 Arctan



Propriété 5 : Fonction *tangente*

La fonction *tangente* est continue et strictement croissante sur $I =]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$

Elle établit donc une bijection $\tilde{tan}$

de $I =]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$ dans $f(I) = \mathbb{R}$

Définition 3 : *arctan*

La fonction $arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$

est la réciproque de la fonction $\tilde{tan}$

à retenir

- Le domaine de **définition** de *arctan* est $\mathbb{R}$
- Le **domaine des valeurs** de *arctan* est $]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$

Propriété 6 : *arctan*

- $y = \tan x \iff x = \arctan y$

  pour $x \in]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$ $y \in \mathbb{R}$
- $\arctan(\tan x) = x$ pour $x \in]-\pi/2\ ;\ +\pi/2[$
- $\tan(\arctan x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$

Propriété 7 : Parité

- La fonction arcsin est impaire
- La fonction arctan est impaire
- La fonction arccos n'est ni paire, ni impaire

Propriété 8 : Dérivées

- La fonction *arcsin* est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

  et $\forall x \in]-1\ ;\ 1[,\quad (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- La fonction *arccos* est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

  et $\forall x \in]-1\ ;\ 1[,\quad (\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- La fonction *arctan* est définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$

  et $\forall x \in \mathbb{R},\quad (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

2 Généralisation

Définition 4 : Bijection

Soit $f : E \to F$ une application

f est bijective si et seulement si tout élément y de F a ***un unique*** antécédent x dans E.

Définition 5 Réciproque

Soit $f : E \to F$ une bijection. On appelle fonction réciproque de f l'application notée $f^{-1} : F \to E$ qui a tout élément de F associe son unique antécédent dans E par f

Cette application est notée f^{-1}

Propriété 9 : Réciproque

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors

- $f^{-1} : F \to E$ est bijective
- $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- $\forall x \in E, \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x$
- $\forall y \in F, \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y$

Définition 6 : application identité

Soit E un ensemble.
L'application identité de E est notée Id_E et est définie par :

$$\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$$

On a donc : $\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$

Propriété 10 : Composée

Soit $f : E \to F$ une bijection et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.
Alors

- $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$

Résulte immédiatement des propriétés précédentes.

3 Cas des fonctions réelles

3.1 Théorème de la bijection

Propriété 11 : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si

- f est continue sur I
- f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Alors

- f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Sa bijection réciproque $f^{-1} : J = f(I) \to I$ est continue et strictement monotone
- De plus f^{-1} est de même monotonie que f, c'est-à-dire : f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si f est strictement croissante (resp. décroissante)

Propriété 12 : Cas d'un intervalle ouvert

Soit f continue et strictement croissante sur un intervalle $I =]a;b[$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Alors f réalise une bijection

$$\text{de} \quad I =]a,b[\quad \text{sur} \quad f(I) = \Big] \lim_{x\to a} f(x)\ ;\ \lim_{x\to b} f(x) \Big[$$

Propriété 13 : Cas d'un intervalle semi-fermé

Soit f continue et strictement décroissante sur un intervalle $I = [a;b[$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Alors f réalise une bijection

$$\text{de} \quad I = [a;b[\quad \text{sur} \quad f(I) = \Big] \lim_{x\to b} f(x)\ ;\ f(a) \Big]$$

Remarque :
On obtiendrait des propriétés similaires en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou bien encore en prenant f croissante.
A vous de les écrire !

Exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

On montre sans problème que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

D'où f est continue et strictement décroissante sur $I=[0\ ;\ +\infty[$

Donc

- f réalise une bijection

  de $I=[0\ ;\ +\infty[$ dans $J=f(I)=]\lim\limits_{+\infty} f\ ;\ f(0)=]0\ ;\ 1]$

- Et sa réciproque $f^{-1}:]0\ ;\ 1]\to[0\ ;\ +\infty[$ est bijective, continue et strictement décroissante.

Démonstration
M.q. si $f : I \to J$ est strictement décroissante alors $f^{-1} : J \to I$ est strictement décroissante aussi

Définition : (Appel) :

$g : E \to F$ est strictement décroissante sur E

$\iff \quad \forall (x_1,x_2)\in E^2,\ x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)>f(x_2)$

Supposons f $f : I \to J$ est strictement décroissante
M.q. f^{-1} est strictement décroissante sur J

Soit $(y_1\ ,\ y_2)\in J^2$

Supposons $y_1<y_2$

(A-ton $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$?)

On va poser $x_1=f^{-1}(y_1)$ et $x_2=f^{-1}(y_2)$

Or on a $y_1<y_2$

$\iff \quad f(x_1)<f(x_2)$

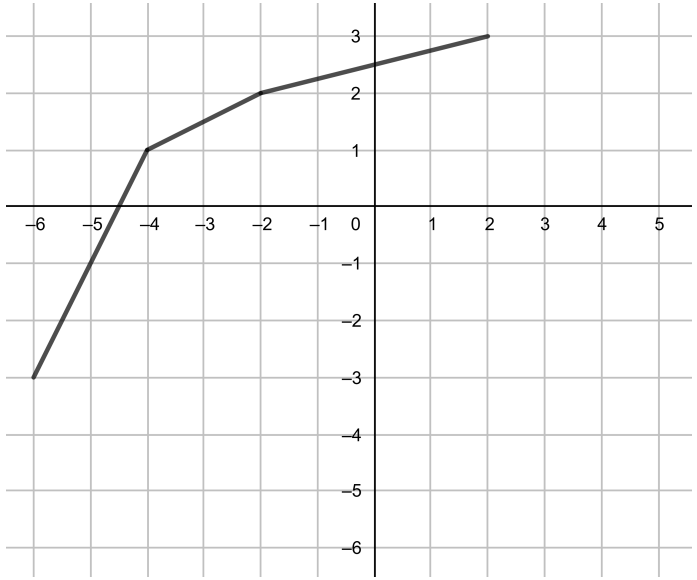
$\iff \quad x_1>x_2$ car f strictement décroissante sur I

$\iff \quad f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$

Donc f^{-1} est strictement décroissante sur J *fin demo*

3.2 Représentations graphiques

Représenter le graphe de la réciproque de la fonction suivante :Soit f la fonction dont voici le graphe :



On a par exemple $f(-4)=1$ donc $f^{-1}(1)=-4$

Donc le point $(1\ ;\ -4)\in C_{f^{-1}}$

Généralisation :

$(x,y)\in C_f$

$\iff \quad f(x)=y$

$\iff \quad f^{-1}(y)=x$

$\iff \quad (y,x)\in C_{f^{-1}}$

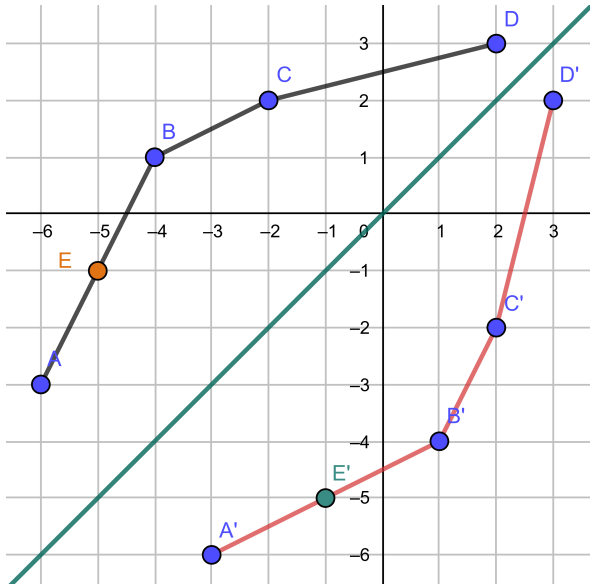
D'où la propriété suivante :

Propriété 14 Courbe de f^{-1}

$(x\ ;\ ,y)\in D_f \quad \iff \quad (y\ ;\ x)\in C_{f^{-1}}$

Donc la courbe $C_{f^{-1}}$ s'obtient par symétrie de C_f par rapport à la droite d'équation $y=x$

On obtient donc le graphique suivant :



3.3 Dérivée

On va déterminer graphiquement la dérivée. La démonstration sera faite plus tard.

Rappel :

Définition 7 : interprétation géométrique de la dérivée

La dérivée en a est la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à C_f au point $(a\ ;\ f(a))$

Prenons par exemple le point $E(-5\ ;\ -1) \in C_f$.

Il est sur le segment $[AB]$ de pente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{2} = 2$ Donc $f'(-5) = 2$

Il lui correspond le point $E'(-1\ ;\ -5) \in C_{f^{-1}}$ qui est sur le segment $[A'B']$ de pente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. D'où $(f^{-1})(-1) = \dfrac{1}{2}$

On a donc $(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'(-5)}$ avec $-5 = f^{-1}(-1)$

D'où $(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))}$

On généralise ce résultat :

Pour $f : E \to F$ dérivable et $y = f(x) \in F$, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \quad \text{avec} \quad x = f^{-1}(y)$$

Remarque importante :

Pour que ce résultat ait un sens, il faut avoir $f'(x) \neq 0$
Et donc, si $f'(x) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y = f(x)$
Cela nous permet d'énoncé le théorème suivant :

Propriété 15 : dérivée de la réciproque

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective.
Pour tout $y \in J$
Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et si $f'(x) \neq 0$,
alors f^{-1} est dérivable en y
et $\big(f^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

3.4 Application aux fonctions trigonométriques

a) **Arcsin**

$$f = \tilde{sin} : [-\pi/2\ ;\ \pi/2] \to [-1\ ;\ 1]$$

a pour réciproque

$$f^{-1} = arcsin : [-1\ ;\ 1] \to [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$$

Soient $y \in [-1,1]$ et $x = \arcsin(y) \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

- $f^{-1} = \arcsin$ est dérivable en y si et seulement si $f = \sin$ est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$

Or $f'(x) = \cos x$

et pour $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$

$\cos x = 0$

$\iff$ $x = -\pi/2$ ou $x = \pi/2$

$\iff$ $y = \sin x = \sin(-\pi/2) = -1$ ou $y = \sin \pi/2 = 1$

Donc *arcsin* est dérivable pour tout $y \in]-1\ ;\ +1[$

- Dans ce cas

$$(\arcsin)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$= \frac{1}{\cos x} \quad \text{avec} \quad y = \sin x$$

(Le but du jeu est d'exprimer $(\arcsin)'(y)$ en fonction de y)

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y^2$

$\Rightarrow$ $|\cos x| = \sqrt{1-y^2}$

Or $x \in]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$ $\Rightarrow$ $\cos x > 0$

$\Rightarrow$ $\cos x = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow$ $(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

C'est-à-dire : $\forall y \in]-1\ ;\ +1[, (\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

- Conclusion :

arcsin est dérivable sur $]-1\ ;\ +1[$

et $\boxed{\forall x \in]-1\ ;\ +1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

b) **Arccos**

c) **Arctan**

Propriété 16 : Dérivées

- La fonction *arcsin* est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

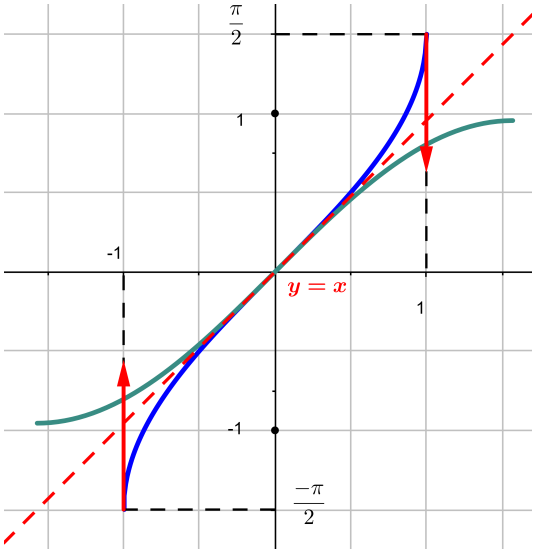
  et $\forall x \in]-1\ ;\ 1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- La fonction *arccos* est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

  et $\forall x \in]-1\ ;\ 1[, \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- La fonction *arctan* est définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$

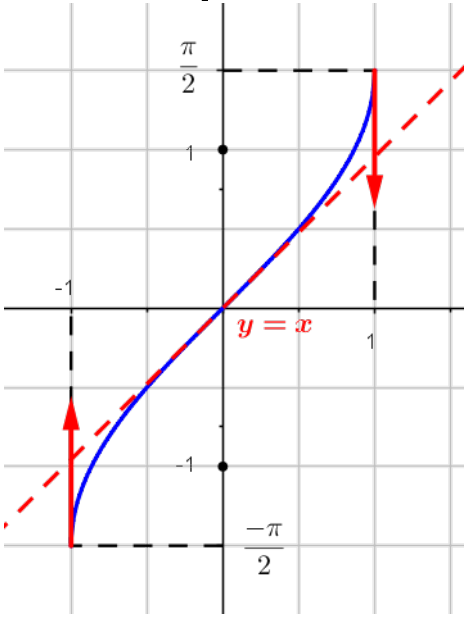
  et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3.5 Représentations graphiques

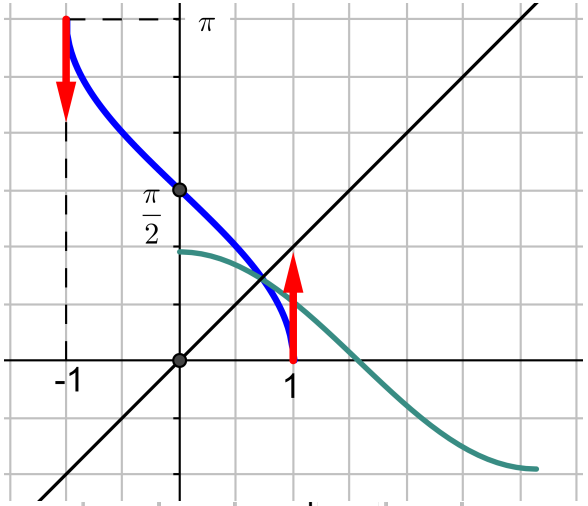
1) courbe de $x \mapsto \arcsin x$ (C 450)

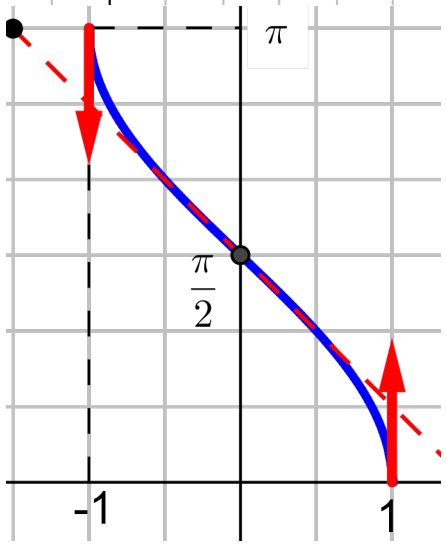


Ce qui donne

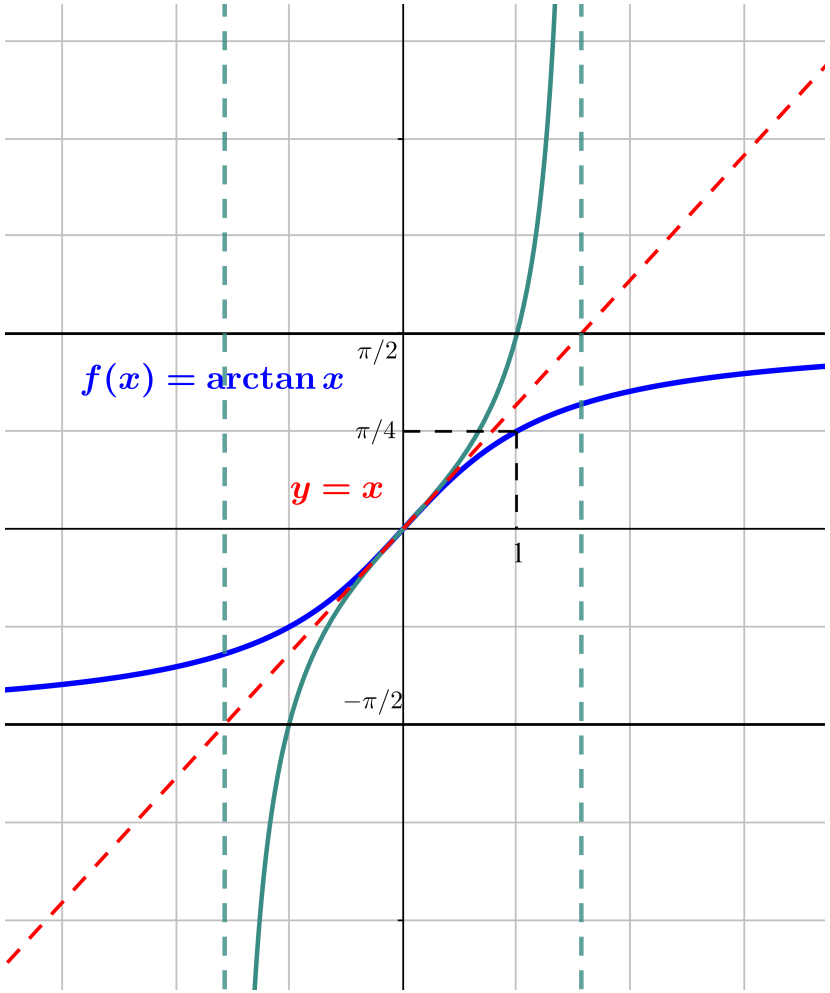


2) courbe de $x \mapsto \arccos x$ (C 451)





3) Courbe de $x \mapsto \arctan x$ (C 452b)



Ce qui donne :

