1) $\sqrt{a+b} = \quad \emptyset$ (C 028a)

2) Avec la valeur absolue : $x \in [-5,\,1] \iff |x+2| \leq 3$ (C 575c)

Segment de centre $\frac{-5+1}{2} = -2$ et de rayon $\frac{1-(-5)}{2} = 3$

3) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 582b)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 3 \iff x^2 \geq 9$

En effet, on a $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ mais la réciproque est fausse

4) $\tan(2\pi/3) = -\sqrt{3}$ (C 101d)

5) **Formule de linéarisation** : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ (C 121a)

Cela vient de la formule $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

6) $\tan x \geq -1 \iff \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (C 176b)

7) $|2\mathbf{i}(1+\mathbf{i})^n| = \quad |2\mathbf{i}| \times |1+\mathbf{i}|^n = 2.(\sqrt{2})^n$ (C 211a)

8) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{e}^{ix}| = \quad 1$ (C 232)

9) $1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}b} = \quad \mathrm{e}^{-\mathbf{i}b/2}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}b/2} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}b/2}\right) = \quad 2\mathbf{i}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}b/2}\sin(b/2)$ (C 238d)

10) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z' = z + \mathbf{i}.2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (C 246)

En effet, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \dfrac{\mathrm{e}^{z'}}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{z'-z} = 1 \iff z' - z = \mathbf{i}.2k\pi$

$\iff z' = z + \mathbf{i}.2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\ [2\pi] \end{cases}$

11) Définition : $\mathbb{U} = \quad \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$ (C 250f)

12) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (E 351b)

$\vec{u}$, $\vec{w}$ deux vecteurs d'affixes non nulles z_u, z_w, l'angle orienté :

$$(\vec{u},\,\vec{w}) = \arg(z_w) - \arg(z_u) = \arg(\frac{z_w}{z_u}) \quad [2\pi]$$

13) $\vec{u}$,$\vec{w}$ sont colinéaires **de même sens** (C 356d)

$$\iff \arg\left(\frac{z_w}{z_u}\right) = 0 + 2k\pi = 0[2\pi]$$

14) $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ sont alignés $\iff \boxed{\dfrac{c-a}{c-b}} \in \mathbb{R}$ (C 358a)

Explication : on doit avoir $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\iff (c-a) = k(b-a) \iff k = \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

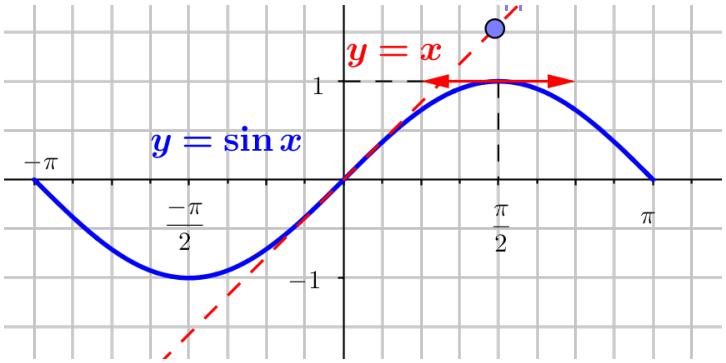
N'importe quelle autre quotient convient aussi : $\frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$, etc.

15) $f(x) = (\ln(2x+1))^3$ (C 424)

$$f'(x) = 3\left(\ln(2x+1)\right)^2\left(\ln(2x+1)\right)' = 3\left(\ln(2x+1)\right)^2\frac{2}{2x+1}$$

$$= \frac{6\big(\ln(2x+1)\big)^2}{2x+1}$$

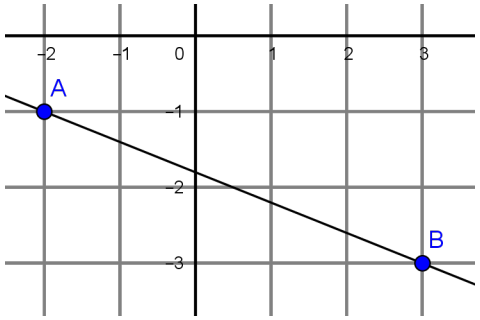
16) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ (C 446a)



Tracer la tangente en 0 et donner son équation : $y = x$

La tangente doit passer par le point $(\pi/2\ ;\ 1{,}5)$ à peu de chose près

17) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) (C 461a)



$y = ax + b$ coefficient directeur $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{5}$

$b = y_A - a.x_A = -1 + \frac{2}{5}(-2) = \frac{-9}{5}$ $\boxed{y = \frac{-2}{5}x + \frac{-9}{5}}$

18) Pour $x^2 \neq 1$ et $n \geq 5$ (C 517b)

$$\sum_{k=5}^{n} x^{2k} = \sum_{k=5}^{n} (x^2)^k = \frac{(x^2)^5 - (x^2)^{n+1}}{1 - x^2} = \frac{x^{10} - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

19) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 540a)

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 5^{n-2k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 5^{n-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 5^{-k}\right)$$

20) $\max(x_1, \ldots, x_n) \leq a \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \leq a$ (C 590a)

21) Pour $n \geq 1$, $\frac{(2n)!}{n!} = \prod_{k=n+1}^{2n} k$ (C 621d)

22) $(3x-2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (3x)^k (-2)^{n+1-k}$ (C 636c)

Ne pas oublier les parenthèses autour de $3x$ sinon c'est faux !

23) Négation de $(\exists y \in F,\ y > A) \Rightarrow (\forall x \in E,\ f(x) > A)$: (C 709e)

$(\exists y \in F,\ y > A)$ ET non-$(\forall x \in E,\ f(x) > A)$

$(\exists y \in F,\ y > A)$ ET $(\exists x \in E,\ f(x) \leq A)$

24) P, Q, R sont des propositions. Schéma classique de démonstration de : $P \Rightarrow (Q$ OU $R)$ (C 722b)

[Début :] Supposons P

On a Q OU non-Q

1er cas : Q est vrai | 2ème cas : Q est Faux (et P est vrai)

...

[Fin :] On a R

Dans tous les cas, on a Q ou R

25) Définition : $x \notin A \backslash B \iff (x \notin A$ OU $x \in B)$ (C 741c)

C'est la négation de $x \in A \backslash B \iff (x \in A$ ET $x \notin B)$

26) Définition $f : E \to F$ est bijective (C 756b)
$\iff$ tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E

Ne surtout pas dire « toute **image** admet un unique antécédent »
En effet, si y est une **image**, cela veut dire, par définition, que y admet déjà un antécédent.
Donc « Toute image admet au moins un antécédent » est une tautologie
La question question ici est de savoir si tout élément **quelconque** y de F est bien l'image d'un élément de x et d'un seul

27) Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions (C 768c)
$x \in D_{f\circ g} \iff (f \circ g)(x)$ existe $\iff$ $x \in D_g$ ET $g(x) \in D_f$

28) $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in [-\pi/2,\, \pi/2]$ (C 903a)

29) $\arccos(-1) =$ π (C 911b)

$\arccos(-1) = \arccos(\cos \pi)) = \pi \in [0,\pi]$

30) $\arcsin\left(\sin(\frac{-3\pi}{5})\right) = \arcsin\left(\sin(\pi - \frac{-3\pi}{5})\right)$ (C 915b)
$= \arcsin\left(\sin(\frac{8\pi}{5})\right) = \arcsin\left(\sin(\frac{8\pi}{5} - 2\pi)\right)$
$= \arcsin\left(\sin(\frac{-2\pi}{5})\right) = \frac{-2\pi}{5}$ car $\frac{-2\pi}{5} \in [-\pi/2,\, \pi/2]$
Ou plus rapide :
$\arcsin\left(\sin(\frac{-3\pi}{5})\right) = \arcsin\left(\sin(-\pi - \frac{-3\pi}{5})\right)$
$= \arcsin\left(\sin(\frac{-2\pi}{5})\right) = \frac{-2\pi}{5}$ car $\frac{-2\pi}{5} \in [-\pi/2,\, \pi/2]$
En utilisant $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin(-\pi - x)$

31) Vrai ou Faux ? . . .**Faux** (C 919c)
$\cos a = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad a = \arccos \frac{3}{5}$

Il faut aussi avoir $a \in [0,\pi]$:
$\left(\cos a = \frac{3}{5} \text{ ET } a \in [0,\pi]\right) \quad \Rightarrow \quad a = \arccos \frac{3}{5}$
En effet, il existe **une infinité** d'angles tels que $\cos a = \frac{3}{5}$
mais **un seul** angle qui est égal à $\arccos \frac{3}{5}$

32) Vrai ou faux ? . . .**Faux** (C 1003)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \neq 0,\ f(x) = 1/x$.
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$

f est décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$
mais pas sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[= \mathbb{R}^*$
Par exemple : $-1 < 1$ mais $f(-1) < f(1)$