1) $\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{5}{6}>\dfrac{1}{4} \iff 12(\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{5}{6})>12\dfrac{1}{4}$ (C 061)

$\iff -8x+10>3 \iff -8x>-7 \iff x<\frac{7}{8}$

2) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 584e)

Pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2} \Rightarrow 0<x<2$

3) $-\cos(x)=\cos(\quad x+\pi\quad)=\cos(\quad -x+\pi\quad)$ (C 111c)

4) $\tan x<\sqrt{3} \iff \dfrac{-\pi}{2}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (C 176a)

5) $\forall z,\ z'\in\mathbb{C},\ |z|+|z'|=$ PFC (C 215b)

6) $\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \arg\big(-z\big)=\arg(z)+\pi\quad[2\pi]$ (C 227a)

En effet, $\arg\big(-1.z\big)=\arg\big(z\big)+\arg\big(-1\big)=\arg\big(z\big)+\pi\quad[2\pi]$

7) Linéariser $\cos^3(\theta)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\theta}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\theta}}{2}\right)^3$ (E 241a)

$=\dfrac{1}{8}\left((\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\theta})^3+3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\theta})^2.\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\theta}+3\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\theta}(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\theta})^2+(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\theta})^3\right)$ (Binome de N.)

$=\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}.\theta}+3\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\theta}+\mathrm{e}^{-3\mathbf{i}.\theta}\right)$

$=\dfrac{1}{8}\left(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)\right)=\dfrac{1}{4}\left(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\right)$

8) Pour $z\in\mathbb{C}$, $\arg(\mathrm{e}^z)=\ \mathrm{Im}(z)\quad[2\pi]$ (C 248)

Pour $\quad z=a+\mathbf{i}b,\quad \mathrm{e}^z=e^a\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}$

$\Rightarrow\quad \arg(\mathrm{e}^z)=\arg(\mathrm{e}^a)+\arg(\mathrm{e}^{\mathbf{i}b})=0+b=\mathrm{Im}(z)\quad[2\pi]$

9) Les racines cubiques de l'unité sont : (C 253d)

$z_0=1,\quad z_1=\mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/3}=\dfrac{-1}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_2=\mathrm{e}^{\mathbf{i}4\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}2\pi/3}=\dfrac{-1}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10) 3 points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, $c\in\mathbb{C}$ (C 351d)

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\quad \arg\left(\frac{z(\ \overrightarrow{BA}\ )}{z(\ \overrightarrow{BC}\ )}\right)=\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\quad[2\pi]$$

11) Soient 3 points distincts A, B, C d'affixes a, b, c (C 352c)

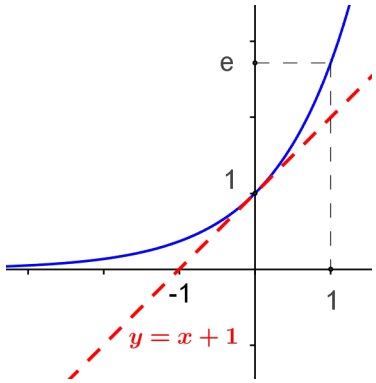
Interprétation géométrique :

$\dfrac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R} \iff A,\ B,\ C$ sont alignés

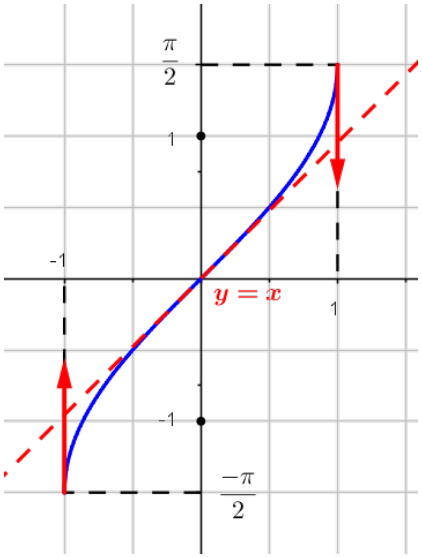
$\iff \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

12) Tracer l'allure de la courbe de $\quad x\mapsto e^x$ (C 440a)

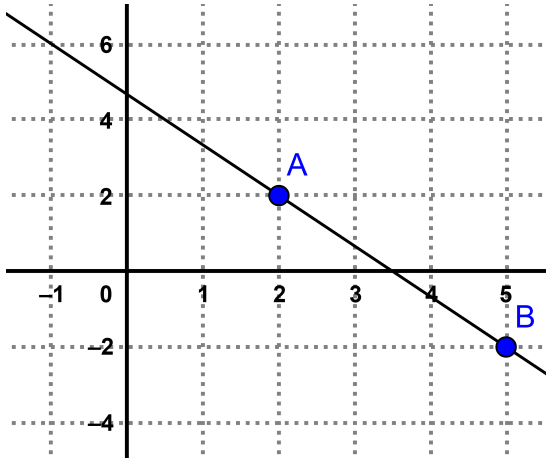
et tracer une tangente particulière



13) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \arcsin x$ (C 450)



14) Représenter la droite de coefficient directeur $\frac{-4}{3}$ passant par le point B (C 460d)



Faire attention aux échelles différentes

15) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pour} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{pour} \quad q = 1 \end{cases}$ (C 516a)

16) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 540d)

$$\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{i} j = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{i(i+1)}{2}$$

Le résultat ne peut pas dépendre de l'indice i

17) Définition : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\lfloor x \rfloor = y$ (C 600b)

$\iff$ $\begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y \leq x < y+1 \end{cases}$

$\iff$ $x = y + \alpha$ avec $y \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in [0,1[$

18) Définition de la factorielle : $\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}$ (C 620)

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'initialisation

Et de plus préciser que la relation est vraie pour tout n

19) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ valable pour $1 \leq p \leq n-1$ (C 632a)

$1 \leq p$ pour que $\binom{n-1}{p-1}$ existe

$p \leq n-1$ pour que $\binom{n-1}{p}$ existe

20) Démonstration de : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x$ (C 715c)

Soit $x \in \mathbb{R}$

Prenons $y = \lfloor x \rfloor + 1$

$y \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \Rightarrow \quad y > x$ CQFD

21) $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff (\exists i \in I, \quad x \in A_i)$ (C 740a)

22) Démontrer que $A \subset A \cup B$ (E 747b)
Soit $x \in A$
$\Rightarrow \quad x \in A$ OU $x \in B$
$\Rightarrow \quad x \in A \cup B$ CQFD

23) Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions. $f+g$ est définie par : (C 767)
$$f+g : E \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Pour définir une correctement fonction , il faut donner - son ensemble de départ, - son ensemble d'arrivée, - l'image de tout x du départ

24) Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications (C 769)
$f = g \iff$
- $E = G$ et $F = H$
(même ensemble de départ et même ensemble d'arrivé)
- $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

25) La fonction arcsin est **impaire** (C 906a)

26) $\arccos(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{5\pi}{6}$ (C 911d)

Attention : ne surtout pas écrire
$$\arccos(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \arccos(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$
En effet, *arccos* est une **application**, donc $-\sqrt{3}/2$ possède une **unique** image, dans $[0, \pi]$, et non une infinité.

Il ne faut pas confondre avec l'équation : $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ qui admet une (double) infinité de solutions :
$$\left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

27) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 919a)
$$a = \arccos\tfrac{3}{5} \iff \cos a = \tfrac{3}{5}$$

L'implication est vraie, mais la réciproque fausse.
Pour avoir l'équivalence, il faudrait :
$$a = \arccos\tfrac{3}{5} \iff (\ \cos a = \tfrac{3}{5} \ \underline{\text{ET}} \ a \in [0,\pi]\ )$$

28) Soit $f : I \to J$ une fonction. (C 1022b)
$$f \text{ s'annule} \iff \exists x \in I,\ f(x) = 0$$

29) Si f est <u>continue et strictement monotone sur l'**intervalle** I</u>
Alors f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$ (C 1080d)

30) Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[,\ x \mapsto 4x + \sqrt{2x}$ (C 1087b)
On admet que f est bijectinve et on note f^{-1} sa réciproque
Calculer $f(2)$, justifier que f^{-1} est dérivable en 2
et déterminer $(f^{-1})'(10)$

$f(2) = 8 + 2 = 10 \quad f'(x) = 4 + \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

f est dérivable en 2 et $f'(2) \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $10 = f(2)$ et $(f^{-1})'(10) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{2}{9}$