Exercice 1 Calcul d'un cosinus

L'objectif de ce problème est de présenter différentes démarches menant à l'expression par radicaux de $\cos(\pi/5)$.
Par commodité, nous poserons $\theta = \pi/5$

1. **Préliminaire**

Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $C(\varphi, n) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\varphi)$

(On donnera une expression réelle du résultat.)

$$C(\varphi, n) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathbf{i}.k\varphi}] = \mathrm{Re}[S_n]$$

avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}.k\varphi} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi})^k$$

- 1er cas : si $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi} = 1 \iff \varphi = 0[2\pi]$

  Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi})^k = n+1$

- 2ème cas : si $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi} \neq 1 \iff \varphi \neq 0[2\pi]$

  $S_n = \dfrac{1-(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi})^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}}$ somme d'une suite géométrique avec $\mathrm{e}^{i\varphi} \neq 0$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}(n+1)\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\varphi/2} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}(n+1)\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\varphi/2} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi/2}}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}(n\varphi/2)} \cdot \frac{-2\mathbf{i}.\sin[(n+1)\varphi/2]}{-2\mathbf{i}\sin[\varphi/2]}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}(n\varphi/2)} \cdot \frac{\sin[(n+1)\varphi/2]}{\sin[\varphi/2]}$$

D'où

$$C(\varphi, n) = \mathrm{Re}[S_n] = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{i}(n\varphi/2)}\right] \cdot \frac{\sin[(n+1)\varphi/2]}{\sin[\varphi/2]}$$

$$= \cos[n\varphi/2] \frac{\sin[(n+1)\varphi/2]}{\sin[\varphi/2]}$$

2. a) Résoudre l'équation $z^5 + 1 = 0$ en exprimant ses solutions sous forme trigonométrique

$$z^5 + 1 = 0$$
$$\iff \quad z^5 = -1$$
$$\iff \quad z^5 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi} \quad \text{avec} \quad z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}$$
$$\iff \quad z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})} \quad \text{avec} \quad k \in [[0,4]]$$

b) Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que $z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$

Posons $Q(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$

$\Rightarrow \quad (z+1)Q(z) = az^5 + (a+b)z^4 + (b+c)z^3 + (c+d)z^2 + (d+e)z + e = z^5 + 1$

Par identification :

$$a = 1 \quad a+b = 0 \quad b+c = 0 \quad c+d = 0 \quad d+e = 0 \quad e = 1$$

$\Rightarrow \quad z^5 + 1 = (z+1)Q(z)$ avec $Q(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$

c) Pour $z \neq 0$, déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $\dfrac{Q(z)}{z^2} = P(Z)$ avec $Z = z + \dfrac{1}{z}$

(On pourra poser $P(Z) = aZ^2 + bZ + c$ puis déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$)

Remarquons d'abord que $Q(0) = 1$ donc 0 ne peut être solution de l'équation.

- 1ère solution

pour $z \neq 0$

$$Q(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$$
$$= z^2\left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$$
$$= z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} + 1\right)$$

$$= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 - z - \frac{1}{z} + 1\right)$$
$$= z^2\left(Z^2 - Z - 1\right)$$

- 2nde solution

$$\frac{Q(z)}{z^2} = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

D'autre part

$$P(Z) = a(z+\frac{1}{z})^2 + b(z+\frac{1}{z}) + c$$
$$= a(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + b(z+\frac{1}{z}) + c$$
$$= a.z^2 + b.z + (2a+c) + b.\frac{1}{z} + e.\frac{1}{z^2}$$

Par identification :

$$a = 1, \quad b = -1, \quad 2a + c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 - 2a = -1$$

$$\Rightarrow \quad P(Z) = Z^2 - Z - 1$$

d) En déduire les solutions de l'équation $Q(z) = 0$

$$Q(z) = 0$$
$$\iff \quad z^2\left(Z^2 - Z - 1\right) = 0$$
$$\iff \quad Z^2 - Z - 1 = 0 \quad \text{car} \quad z \neq 0$$

$$\Delta = 5, \quad Z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad Z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or $Z_i = z + \frac{1}{z} \quad \iff \quad z.Z = z^2 + 1$

$$\iff \quad z^2 - Z.z + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta' = Z^2 - 4$$

Mais on a $Z^2 - Z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z^2 = Z + 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta' = Z - 3$

$$\Rightarrow \quad \Delta'_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2} = -\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 0$$

et $\Delta'_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} = -\frac{5+\sqrt{5}}{2} < 0$

On a donc 4 racines 2 à 2 conjuguées :

$$z_{1a} = \frac{Z_1 + \mathbf{i}\sqrt{-\Delta'_1}}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+\mathbf{i}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_{1b} = \frac{Z_1 - \mathbf{i}\sqrt{-\Delta'_1}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-\mathbf{i}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_{2a} = \frac{Z_2 + \mathbf{i}\sqrt{-\Delta'_2}}{2} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}+\mathbf{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$z_{2b} = \frac{Z_2 - \mathbf{i}\sqrt{-\Delta'_2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}-\mathbf{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

e) Déterminer enfin l'expression par radicaux de $\cos\theta$.

(c'est-à-dire écrire $\cos\theta$ sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$)

- $\cos\theta = \text{Re}[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]$ et $z_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est une des 5 solutions de l'équation $z^5 = 1$
- $z = 1$ est bien sûr à exclure.
- D'autre part $0 < \theta < \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Re}[z_1] > 0$
  Les solutions z_{2a} et z_{2b} sont exclues
- Enfin, on a $\sin\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(z) > 0$
  Donc z_{1b} est exclue aussi
- Finalement il reste donc $z_1 = z_{1a} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \text{Re}[z_{1a}] = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

3. a) En utilisant les exponentielles complexes, calculer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$

$$\cos 4x = \text{Re}[\mathrm{e}^{\mathbf{i}4x}]$$

avec

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}4x} = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)^4$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (\cos x)^{4-k} (\,\mathbf{i}\sin x)^k$$
$$= (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3(\mathbf{i}.\sin x)^1 + 6(\cos x)^2(\mathbf{i}.\sin x)^2 + 4(\cos x)(\mathbf{i}.\sin x)^3 + (\mathbf{i}.\sin x)^4$$
$$= \cos^4 x + 4\mathbf{i}\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x.\sin^2 x - 4\mathbf{i}.\cos x.\sin^3 x + \sin^4 x$$

Donc

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x).\sin^2 x + (1-\cos^2 x)^2$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x).\sin^2 x + (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

b) En déduire que $\cos\theta$ est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$

D'après ce qui précède

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

Or $\cos 4\theta = \cos(4\pi/5) = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\theta$

En remplaçant avec l'expression précédente, on a donc

$$8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = -\cos\theta$$

$\cos\theta$ est donc solution de l'équation

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = -x \iff 8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$$

c) Résoudre celle-ci en commençant par observer l'existence de solutions « évidentes » (-1 et 1/2)

On peut factoriser :

$$P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 8x^2(x^2-1) + (x+1)$$
$$= (x+1)\big[8x^2(x-1)+1\big] = (x+1)\big[8x^3 - 8x^2 + 1\big]$$

$\frac{1}{2}$ est aussi solution : $8(1/2)^3 - 8(1/2)^2 + 1 = 8/8 - 8/4 + 1 = 0$

On peut donc encore factoriser par $x - \frac{1}{2}$:

$$8x^3 - 8x^2 + 1 = (x - \tfrac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$$

En développant : $8x^3 - 8x^2 + 1 = ax^3 + (b - \frac{1}{2}a)x^2 + (c - \frac{1}{2}b)x - \frac{1}{2}c$

Par identification :
$$\begin{cases} a = 8 \\ b - \frac{1}{2}a = -8 \\ c - \frac{1}{2}b = 0 \\ -\frac{1}{2}c = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = \frac{1}{2}a - 8 = -4 \\ c = \frac{1}{2}b = -2 \\ -\frac{1}{2}c = 1 \end{cases}$$

On a donc $P(x) = (x+1)(x - \frac{1}{2})(8x^2 - 4x - 2)$

Conclure.

$\cos\theta$ est une racine du polynôme P
Et $0 < \theta < \pi/3 \Rightarrow 1 > \cos\theta > 1/2 \Rightarrow \cos\theta \neq \frac{1}{2}$ et $\cos\theta \neq -1$

Donc $\cos\theta$ est racine de $8x^2 - 4x - 2$

$\Delta = 16 - 4\cdot 8\cdot(-2) = 16\cdot 5$, $x_1 = \dfrac{4 + 4\sqrt{5}}{2\cdot 8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$

Or $\cos\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

4. a) Montrer que $\cos\theta + \cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$

- 1ère méthode

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

Donc

$$S = \cos\theta + \cos 3\theta$$
$$= 2\cos 2\theta\cos(-\theta)$$
$$= 2\cos(2\theta)\cos\theta$$
$$= 2\cos(2\theta)\cos\theta\frac{\sin\theta}{\sin\theta} \quad \text{car} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$= \frac{\cos(2\theta).2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\cos(2\theta).\sin(2\theta)}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(4\theta)}{2\sin\theta}$$

Or $\sin 4\theta = \sin\frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin\frac{\pi}{5} = \sin\theta$

Donc $S = \cos\theta + \cos 3\theta = \frac{1}{2}$

- 2^{nde} méthode

On remarque que

$$1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta = 0$$

Et que d'autre part

$$\cos 2\theta = \cos 8\theta = -\cos 3\theta$$
$$\cos 4\theta = \cos 6\theta = -\cos\theta$$

Ce qui donnera le résultat désiré

Démontrons-le :

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta} + \mathrm{e}^{4\mathbf{i}\theta} + \mathrm{e}^{6\mathbf{i}\theta} + \mathrm{e}^{8\mathbf{i}\theta} = \frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta})^5}{1-\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\theta}} = 0 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{10.\mathbf{i}\theta} = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 0$$

En passant à la partie réelle, on obtient

$$1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta = 0$$

D'autre part :

$$\cos 2\theta = \cos\tfrac{2\pi}{5} = \cos(\pi - \tfrac{3\pi}{5}) = -\cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos 3\theta$$
$$\cos 4\theta = \cos\tfrac{4\pi}{5} = \cos(\pi - \tfrac{\pi}{5}) = -\cos\tfrac{\pi}{5} = -\cos\theta$$
$$\cos 6\theta = \cos\tfrac{6\pi}{5} = \cos(\pi + \tfrac{\pi}{5}) = -\cos\theta$$
$$\cos 8\theta = \cos(\pi + \tfrac{3\pi}{5}) = -\cos 3\theta$$

Donc

$$0 = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta$$
$$= 1 - 2\cos\theta - 2\cos 3\theta$$
$$\Rightarrow \quad \cos\theta + \cos 3\theta = \tfrac{1}{2}$$

b) Montrer que $\cos\theta\cos 3\theta = \dfrac{-1}{4}$

$$\cos\theta\cos 3\theta = \tfrac{1}{2}[\cos(\theta+3\theta) + \cos(\theta-3\theta)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(4\theta) + \cos(2\theta)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(\tfrac{4}{5}\pi) + \cos(\tfrac{2}{5}\pi)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(\pi - \tfrac{1}{5}\pi) + \cos(\pi - \tfrac{3}{5}\pi)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[-\cos(\tfrac{1}{5}\pi) - \cos(\tfrac{3}{5}\pi)]$$
$$= -\tfrac{1}{2}[\cos(\theta) + \cos(3\theta)]$$
$$= -\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}] = -\tfrac{1}{4}$$

c) En déduire la valeur de $\cos\theta$

$S = \cos\theta + \cos 3\theta = \frac{1}{2}$ et $P = \cos\theta\cos 3\theta = -\frac{1}{4}$

Donc $\cos\theta$ et $\cos 3\theta$ sont racines de l'équation

$$X^2 - SX + P = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X^2 - \tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = \tfrac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}, \quad X_1 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$$

Or $\cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

5. a) En utilisant le préliminaire, calculer $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta$

$$S = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta$$
$$= \sum_{k=0}^{4} \cos(2\theta.k)$$
$$= C(2\theta,\, 4)$$
$$= \cos\left(\frac{4}{2}2\theta\right)\frac{\sin\frac{(4+1)2\theta}{2}}{\sin\frac{2\theta}{2}}$$
$$= \cos 4\theta\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$$

$= 0$ car $\sin 5\theta = \sin \pi = 0$

b) En déduire que $\cos\theta$ est solution d'une équation du second degré. Conclure.

- $\cos 4\theta = \cos \frac{4}{5}\pi = \cos(\pi - \frac{1}{5}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{5}) = -\cos\theta$
- $\cos 6\theta = \cos \frac{6}{5}\pi = \cos(\pi + \frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5}) = -\cos\theta$
- $\cos 8\theta = \cos \frac{8}{5}\pi = \cos(2\pi - \frac{2}{5}\pi) = \cos(\frac{2}{5}\pi) = \cos 2\theta$

En remplaçant dans le calcul précédent, on obtient :

$$1 + 2\cos 2\theta - 2\cos\theta = 0$$
$$\iff \quad 1 + 2(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta = 0$$
$$\iff \quad 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

Donc $\cos\theta$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4.4 = 4.5 \quad x_1 = \dfrac{2 + 2\sqrt{5}}{2.4} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$